

1. Naj bo $G = D_{2n}$ diederska grupa za $n = 4$.

(a) Poiščite vse podgrupe edinke grupe D_8 .

(b) Katera je center grupe?

(c) Kateri znani grupi je izomorfna grupa $D_8/Z(D_8)$?

2. Naj bo $A = \{p + q(i\sqrt{3}) \mid p, q \in \mathbb{Q}\}$. Ali je kolobar za običajno seštevanje in množenje? Ali je obseg?

3. Naj bo R množica matrik oblike

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}.$$

(a) Če so $a, b \in \mathbb{R}$, dokaži, da je R kolobar.

(b) Če so $a, b \in \mathbb{Q}$, dokaži, da je R obseg.

(c) Če so $a, b \in \mathbb{Z}_3$, dokaži, da je R obseg.

Operaciji sta v vseh primerih seštevanje in množenje matrik.

4. V kolobarju $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ reši enačbe:

- $3x + 5 = 2$
- $6x + 7 = 4$
- $2x^2 + 5x + 3 = 0$

5. V kolobarju $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ reši sistema enačb:

- $2x + 7y = 11$ in $5x + 3y = 11$.
- $3x + 7y = 4$ in $6x + y = 1$.

6. Naj v $\mathbb{Z}_{100}$ velja:

$$55x + 92y = 79$$

$$9x + 2y = 1$$

Poišči vse možne rešitve $x, y \in \mathbb{Z}_{100}$.

7. V polju $(\mathbb{Z}_{103}, +, \cdot)$ reši sistem enačb: $30x + 7y + 16z = 4$, $6x + y + 55z = 1$ in $x + y + 13z = 22$.

Domača naloga

8. Naj bo G grupa in H njena podgrupa. Pokažite, da je H podgrupa edinka natanko tedaj, ko za vsak $a \in G$ velja $aH = Ha$.

9. Naj bo G grupa in H njena podgrupa indeksa 2. Pokažite, da je H podgrupa edinka.

10. Pokažite, da je grupa A_n podgrupa edinka grupe S_n .

11. Z A_4 označimo množico vseh sodih permutacij iz S_4 .

(a) Pokažite, da je A_4 grupa za operacijo množenja permutacij.

(b) Naštejte vse elemente grupe A_4 .

(c) Poiščite vse podgrupe grupe A_4 .

(d) Katere od podgrup grupe A_4 so podgrupe edinke? Določite konjugiranostne razrede podgrup grupe A_4 .

(e) Kateri grupi je izomorfna grupa A_4/H ?

12. Naj bo A_5 grupa vseh sodih permutacij množice $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

(a) Koliko elementov ima grupa A_5 ?

(b) Zapišite vse možne rede elementov grupe A_5 in za vsak možen red r poiščite predstavnika, ki ima red r .

(c) Zapišite vse elemente reda 2. Ali skupaj z enoto tvorijo grupo?

13. Dane so množice

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; x, y \in \mathbb{R}, x > 0 \right\},$$
$$K = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; x \in \mathbb{R}, x > 0 \right\} \text{ in}$$
$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pokažite, da je G grupa za operacijo množenja matrik in K, H njeni podgrupi. Pokažite, da K ni podgrupa edinka. Pokažite, da H je podgrupa edinka. Pokažite, da je grupa G/H izomorfna grupi $(\mathbb{R}^+, \cdot)$.

14. Pokažite, da je grupa $\mathbb{Z}_{15}^*$ izomorfna grupi $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$. Poiščite še izomorfizem med njima.

15. Naj bo G grupa generirana z dvema elementoma a in x , za katera veljajo relacije: $a^6 = \text{id}, x^2 = a^3, ax = xa^{-1}$.

(a) Pokaži, da ima grupa G 12 elementov. Dovolj je, da pokažeš, da jih nima več kot 12.

(b) Grupa G ima 6 podgrup, če ne štejemo podgrupe z enim elementom in cele grupe. Poišči jih. Katere podgrupe so edinke?

16. Naj bo $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ kvaternionjska grupa, kjer je množenje definirano kot $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ in $ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j$. Kateri grupi je izomorfna kvocientna grupa Q_8 po centru?