

1. Dana sta vektorja $\vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ in $\vec{n} = -3\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. Vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ ter $\vec{c}$ so enotski. Vektor $\vec{a}$ z vektorjema $\vec{b}$ in $\vec{c}$ oklepa kot $\frac{\pi}{6}$, kot med vektorjema $\vec{b}$ in $\vec{c}$ pa je enak $\frac{5\pi}{6}$. Izračunajte dolžini diagonal paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\vec{m}$ in $\vec{n}$.

Rešitev

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \vec{b} \cdot \vec{c} = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \\ \vec{m} + \vec{n} &= -\vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{c}, \vec{m} - \vec{n} = 5\vec{a}. \\ |\vec{m} + \vec{n}| &= \sqrt{9 + 4\sqrt{3}}, |\vec{m} - \vec{n}| = 5.\end{aligned}$$

2. Brez kalkulatorja izračunajte $\log_7 8 \cdot \log_6 7 \cdot \log_5 6 \cdot \log_4 5 \cdot \log_3 4 \cdot \log_2 3 =$

Rešitev

$$\log_7 8 \cdot \log_6 7 \cdot \log_5 6 \cdot \log_4 5 \cdot \log_3 4 \cdot \log_2 3 = \frac{\log_2 8 \cdot \log_2 7 \cdot \log_2 6 \cdot \log_2 5 \cdot \log_2 4 \cdot \log_2 3}{\log_2 7 \cdot \log_2 6 \cdot \log_2 5 \cdot \log_2 4 \cdot \log_2 3 \cdot \log_2 2} = 3$$

3. Izračunajte

$$\frac{i^1 + i^3 + i^5 + \dots + i^{1001}}{i^2 + i^4 + i^6 + \dots + i^{998}} =$$

Rešitev

$$\frac{i^1 + i^3 + \dots + i^{1001}}{i^2 + i^4 + \dots + i^{998}} = \frac{i \cdot (1 + i^2 + \dots + i^{1000})}{i^2 \cdot (1 + i^2 + \dots + i^{996})} = \frac{i^{1001} - 1}{i \cdot (i^{997} - 1)} = \frac{i - 1}{i \cdot (i - 1)} = -i$$

4. Izračunajte $\sqrt{1 + 100\sqrt{1 + 101\sqrt{1 + 102\sqrt{1 + 103\sqrt{1 + \dots}}}}}$

Rešitev

$$\begin{aligned}x^2 - 1 &= (x - 1)(x + 1) \\ x &= \sqrt{1 + (x - 1)(x + 1)} \\ 101 &= \sqrt{1 + 100 \cdot 102} \quad 102 = \sqrt{1 + 101 \cdot 103} \quad \dots \\ 101 &= \sqrt{1 + 100\sqrt{1 + 101\sqrt{1 + 102\sqrt{1 + 103\sqrt{1 + \dots}}}}}\end{aligned}$$

5. Korena enačbe

$$\sqrt[3]{(x - 3)^2} = 4(3 + \sqrt[3]{x - 3})$$

sta prvi in devetindvajseti člen naraščajočega aritmetičnega zaporedja. Kateri člen je enak kubu drugega člena?

Rešitev

$$\sqrt[3]{x - 3} = t, t^2 = 4(3 + t), t^2 - 4t - 12 = 0, t_1 = -2, t_2 = 6, x_1 = -5, x_2 = 219, -5 + 28d = 219, d = 8, \text{Arit. zaporedje: } -5, 3, 11, 19, 27, \dots \text{ Peti člen je enak kubu drugega člena.}$$

6. Rešite trigonometrično enačbo $3 \tan^4 x - 10 \tan^3 x + 6 \tan^2 x - 10 \tan x + 3 = 0$.

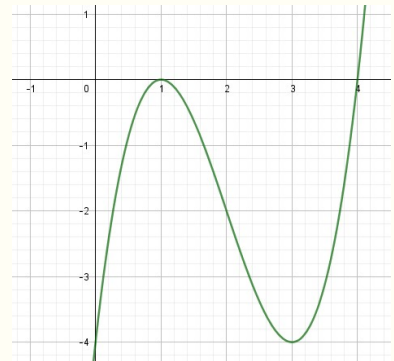
Rešitev

$\tan x = t, 0 = 3t^4 - 10t^3 + 6t^2 - 10t + 3 = 3(t^4 + 2t^2 + 1) - 10t(t^2 + 1) = 3(t^2 + 1)^2 - 10t(t^2 + 1) = (t^2 + 1)(3t^2 - 10t + 3), t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6}, t_1 = \tan x_1 = 3, t_2 = \tan x_2 = \frac{1}{3},$ Rešitve: $x_k = \arctan 3 + k\pi$ in $x_l = \arctan \frac{1}{3} + l\pi$ za $k, l \in \mathbb{Z}$.

7. Proučite in skicirajte graf funkcije $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$. Zavrtite krivuljo okoli x -osi za 360° in določite prostornino vrtenine dela krivulje od presečišča z ordinatno osjo do lokalnega maksimuma.

Rešitev

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = (x-1)^2(x-4), f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3), f''(x) = 6x - 12, (1, 0)$ je max., $(3, -4)$ je min.. Vrtenina: $\pi \int_0^1 (x-1)^4(x-4)^2 dx = \pi \int_{-1}^0 t^4(t-3)^2 dt = \pi \int_{-1}^0 (t^6 - 6t^5 + 9t^4) dt = \pi \left(\frac{t^7}{7} - t^6 + \frac{9t^5}{5} \right) \Big|_{-1}^0 = \pi \left(\frac{1}{7} + 1 + \frac{9}{5} \right) = \frac{103}{35} \pi \approx 2.94\pi \approx 9.25$.



8. Napišite enačbo premice, ki gre skozi središči stožnic

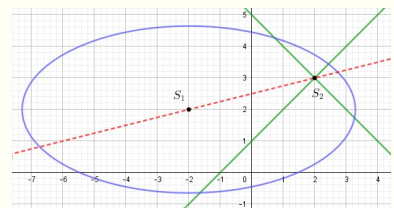
$$x^2 + 4y^2 + 4x - 16y - 8 = 0$$

$$-x^2 + y^2 + 4x - 6y + 5 = 0$$

in stožnici skicirajte.

Rešitev

$x^2 + 4y^2 + 4x - 16y - 8 = 0 \iff \frac{(x+2)^2}{(2\sqrt{7})^2} + \frac{(y-2)^2}{(\sqrt{7})^2} = 1$
 $-x^2 + y^2 + 4x - 6y + 5 = 0 \iff (y-3)^2 - (x-2)^2 = 0 \iff (y-x-1)(y+x-5) = 0$, Središči: $(-2, 2)$ za elipso in $(2, 3)$ za 'dve premici'. Premica $y = \frac{x}{4} + \frac{5}{2} \iff x - 4y + 10 = 0$.



9. V žari je 100 kroglic, ki so bele ali črne barve. Kaj lahko povemo o številu belih in številu črnih kroglic v žari, če vemo, da je ob vračanju kroglic v žaro verjetnost, da v skupno 15 poskusih izvlečemo vsaj eno belo kroglico, vsaj $\frac{1}{2}$?

Rešitev

Naj bo število črnih kroglic enako n . Verjetnost, da v petnajstih poskusih ne bo nobene bele: $\left(\frac{n}{100}\right)^{15}$. Da bo vsaj ena bela: $1 - \left(\frac{n}{100}\right)^{15} \geq \frac{1}{2} \iff \frac{100}{15^{1/2}} \geq n \iff 95.48 \geq n$. Torej mora biti v žari vsaj 5 belih in največ 95 črnih kroglic.