

Analiza 1: 4. kolokvij

26. 5. 2022

Naloga iz teorije (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

N Če je $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija, posplošeni integral $\int_0^1 \frac{g(x)}{x^2} dx$ divergira.

N Če je funkcija $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna, je Riemannovo integrabilna.

P Če zaporedje zveznih funkcij $(f_n)_n$ konvergira enakomerno na $[0, 1]$, potem tudi zaporedje funkcij $g_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$ konvergira enakomerno na $[0, 1]$.

P Funkcija $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(e^{nx^2})}{n^2}$ je zvezna na $\mathbb{R}$.

P Metrični prostor $(C[a, b], d_{\infty})$ je poln metrični prostor.

N Če je množica A v metričnem prostoru M zaprta, potem je tudi omejena.

P Za $x \in \mathbb{R}$ je vsota potenčne vrste $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$ enaka e^{-x^2} .

N Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taka, da za vse $n \in \mathbb{N}_0$ velja $f^{(n)}(0) = 0$. Potem je f ničelna funkcija.

P Naj bo $\alpha \in \mathbb{R}$. Potenčna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} x^n$ ima konvergenčni radij 1.

N Vsaka neskončna podmnožica poljubnega metričnega prostora ima vsaj eno stekališče.

Točkovanje.

- Vsak pravilni odgovor: 2 točki.
- Prvi nepravilni odgovor: 0 točk.
- Vsak nadaljnji nepravilni odgovor: -2 točki.

1. naloga (15 točk)

V odvisnosti od $\alpha > 0$ obravnavaj konvergenco posplošenega integrala

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln(1+x) - x}{x^\alpha} dx.$$

Rešitev. Integrand je zvezen in povsod definiran na $(0, \infty)$, zato je treba preveriti le konvergenco integrala v točki 0 in v neskončnosti.

Pri obravnavanju konvergence v okolici točke 0 najprej opazimo¹, da velja:

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2} \neq 0.$$

Če torej vpeljemo

$$g(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2},$$

se integral izraža v obliki

$$I = \int_0^\infty \frac{g(x)}{x^{\alpha-2}} dx.$$

Iz kriterija za konvergenco/divergenco integrala v okolici točke 0 torej sledi, da integral konvergirata v okolici točke 0 natanko tedaj, ko je $\alpha - 2 < 1$, oziroma ekvivalentno $\alpha < 3$.

Pri obravnavanju konvergence v neskončnosti namesto tega izhajamo iz limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x) - x}{x} = -1 \neq 0.$$

Če vpeljemo

$$h(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x},$$

se torej integral izraža v obliki

$$I = \int_0^\infty \frac{h(x)}{x^{\alpha-1}} dx.$$

Iz kriterija za konvergenco/divergenco integrala v neskončnosti torej sledi, da integral konvergirata v neskončnosti natanko tedaj, ko je $\alpha - 1 > 1$, oziroma ekvivalentno $\alpha > 2$.

Integral torej konvergirata natanko tedaj, ko velja $2 < \alpha < 3$.

Opomba. V obeh primerih je bistvenega pomena, da je limita različna od 0, saj je to ena od predpostavk v kriteriju za divergenco integrala. (Brez tega bi z uporabo kriterija dobili le zadostne pogoje za konvergenco, ne pa tudi potrebnih pogojev.)

Točkovanje.

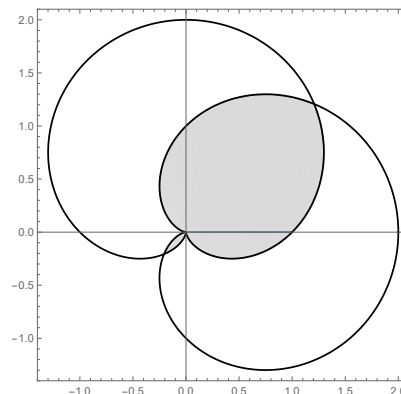
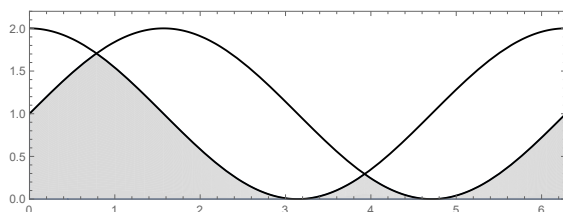
- Obravnavati je treba točki 0 in ∞ : 2 točki.
- Uporaba kriterija v okolici točke 0 in utemeljitev: 6 točk.
- Uporaba kriterija v neskončnosti in utemeljitev: 6 točk.
- Integral konvergirata natanko tedaj, ko je $\alpha \in (2, 3)$: 1 točka.

¹To sledi npr. iz Taylorjevega razvoja $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$ ali pa z uporabo L'Hospitalovega pravila.

2. naloga (20 točk)

V ravnini sta s polarnima predpisoma $r(\varphi) \leq 1 + \sin \varphi$ in $r(\varphi) \leq 1 + \cos \varphi$ za $\varphi \in [0, 2\pi]$ podana dva lika. Izračunaj ploščino in obseg njunega preseka. (Nasvet: Upoštevaj simetrijo.)

Rešitev. Krivulji sta kardioidi. Za občutek najprej skicirajmo graf odvisnosti radija od kota za obe krivulji, nato pa še krivulji sami. Območje, ki nas zanima, je obarvano sivo:



Opazimo, da je območje simetrično glede na simetralo lihih kvadrantov. Torej bo dovolj izračunati ploščino/obseg nad to simetralo, kar ravno ustreza $\varphi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$, in rezultat množiti z 2:

$$\begin{aligned} p &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} r^2 d\varphi \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} 2 \cos \varphi d\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{3\pi}{2} - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} s &= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} d\varphi \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sqrt{(1 + \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} d\varphi \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sqrt{2 + 2 \cos \varphi} d\varphi \\ &= 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi \\ &= 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi - 4 \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 16 - 8 \sin \frac{\pi}{8} - 8 \sin \frac{5\pi}{8}. \end{aligned}$$

Točkovanje.

- Skica in/ali razmislek o območju integracije: 4 točke.
- Izračun ploščine: 8 točk.
- Izračun dolžine: 8 točk.

3. naloga (15 točk)

Dana je funkcijska vrsta

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(1-x^n)}{n}.$$

- a) Pokaži, da je F enakomerno konvergentna na intervalu $[0, r]$ za vsak $r < 1$.
b) Dokaži, da F ni enakomerno konvergentna na intervalu $[0, 1]$. (Namig: oglej si vsoto vrste.)

Rešitev. V točki a) zadošča opaziti², da za $x \in [0, r]$ velja ocena

$$0 \leq \frac{x^n(1-x^n)}{n} \leq \frac{r^n \cdot 1}{n} \leq r^n.$$

Funkcijska vrsta je torej na $[0, r]$ nenegativna in majorizirana s konvergentno številsko vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} < \infty.$$

Po Weierstrassovem kriteriju vrsta enakomerno konvergira na $[0, 1]$.

V točki b) vrsto najprej seštejemo za $0 \leq x < 1$. V tem primeru je

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(1-x^n)}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n - x^{2n}}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n} \\ &= -\ln(1-x) + \ln(1-x^2) = \ln(1+x). \end{aligned}$$

Za $x = 1$ pa so vsi členi vrste enaki 0 in je torej tudi $F(x) = 0$. Opazimo, da je

$$\lim_{x \uparrow 1} F(x) = \ln(2) \neq 0 = F(1),$$

torej funkcija F ni zvezna. Po drugi strani so vsi sumandi zvezni, torej vrsta na $[0, 1]$ ne konvergira enakomerno.

Točkovanje.

- Točka a): 7 točk.
- Točka b): 8 točk.

²Točko a) je možno rešiti tudi tako, da vrsto najprej preoblikujemo v potenčno vrsto. V tem primeru je treba natančno utemeljiti, zakaj je ta korak legitimen.

4. naloga (15 točk)

Naj bo $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strogo pozitivna zvezna funkcija.

a) Dokaži, da je s predpisom

$$d(a, b) = \left| \int_a^b g(t) dt \right|$$

podana metrika na množici realnih števil.

b) Dokaži, da obstajata $a \in (0, 1)$ in $r > 0$, da je $(0, 1) = K(a, r)$.

c) Poišči primer funkcije g , za katero je prostor $(\mathbb{R}, d)$ omejen.

Rešitev. V točki a) preverimo lastnosti metrike, ki v resnici sledijo iz lastnosti integralov:

- Simetričnost:

$$d(a, b) = \left| \int_a^b g(t) dt \right| = \left| - \int_b^a g(t) dt \right| = \left| \int_b^a g(t) dt \right| = d(b, a).$$

- Pozitivnost: očitno³ velja $d(a, b) \geq 0$ in $d(a, a) = 0$. Obratno, če je $d(a, b) = 0$, lahko brez škode za splošnost privzamemo, da je $b \geq a$, saj smo že dokazali simetričnost. Ker je funkcija g pozitivna, sklepamo, da je

$$0 = \int_a^b g(t) dt \geq \int_a^b \left(\min_{s \in [a, b]} g(s) \right) dt = (b - a) \min_{s \in [a, b]} g(s).$$

Ker pa je $\min_{s \in [a, b]} g(s) > 0$, od tod sledi $b - a = 0$ in zato $a = b$.

- Trikotniška neenakost:

$$d(a, b) = \left| \int_a^b g(t) dt \right| = \left| \int_a^c g(t) dt + \int_c^b g(t) dt \right| \leq \left| \int_a^c g(t) dt \right| + \left| \int_c^b g(t) dt \right| = d(a, c) + d(c, b).$$

V točki b) iščemo $a \in (0, 1)$ in $r > 0$, da bo veljalo $(0, 1) = K(a, r)$. (Za razlago, od kod dobimo idejo za definicijo a in r , glej opombo spodaj.) Definirajmo

$$r := \frac{1}{2} \int_0^1 g(t) dt.$$

S predavanj vemo, da je funkcija $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definirana s predpisom

$$G(x) := \int_0^x g(t) dt,$$

zvezna. Poleg tega je $G(0) = 0$ in $G(1) = 2r$. Po zveznosti obstaja $a \in (0, 1)$, da velja $G(a) = r$. Ker je funkcija g pozitivna, je G strogo naraščajoča, zato $0 < G(x) < 2r$ velja natanko tedaj, ko je $0 < x < 1$. Torej je res $(0, 1) = K(a, r)$. Velja namreč:

$$x \in K(a, r) \iff \int_a^x g(t) dt \in (-r, r) \iff G(x) - G(a) \in (-r, r) \iff G(x) \in (0, 2r) \iff x \in (0, 1).$$

V točki c) pa lahko vzamemo npr. $g(t) = \frac{1}{1+t^2}$ in dobimo

$$d(a, b) = \left| \int_a^b \frac{dt}{1+t^2} \right| = |\arctan b - \arctan a| \leq \pi,$$

od koder sledi, da je prostor v tem primeru omejen.

³Prvo velja, ker je absolutna vrednost nenegativna, drugo pa zato, ker je $\int_a^a g(t) dt = 0$.

Opomba. Idejo za rešitev točke b) dobimo tako, da opazimo, da je

$$K(a, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(a, x) < r\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -r < \int_a^x g(t) dt < r\right\}.$$

Če obstajata a in r , da je $K(a, r) = (0, 1)$, si torej lahko mislimo, da bo zanju veljalo

$$\int_a^1 g(t) dt = r \quad \text{in} \quad \int_a^0 g(t) dt = -r$$

ter zato

$$\int_0^1 g(t) dt = 2r,$$

se pravi obstaja le en smiseln kandidat za r . Število a nato poiščemo tako, da ustreza pogoju zgoraj (in prav to smo v dokazu tudi storili).

Točkovanje.

- Točka a): 5 točk⁴.
- Točka b): 6 točk.
- Točka c): 4 točke.

⁴Od tega 1 točka za simetričnost, 2 točki za pozitivnost in 2 točki za trikotniško neenakost.

5. naloga (15 točk)

Dane so zvezne funkcije $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Denimo, da funkcijsko zaporedje $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira enakomerno na $[0, 1]$ k funkciji $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

a) Dokaži, da je zaporedje $(f_n(1))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentno.

b) Naj bo funkcija $\bar{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definirana z zahtevo

$$\bar{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Dokaži, da funkcijsko zaporedje $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira enakomerno na $[0, 1]$ proti $\bar{f}$.

Rešitev. V točki a) bo dovolj dokazati, da je zaporedje $(f_n(1))_n$ Cauchyjevo. Naj bo $\epsilon > 0$. Ker so vse funkcije f_n zvezne v točki 1, za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja $\delta_n > 0$, da za $|x - 1| < \delta_n$ velja

$$|f_n(x) - f_n(1)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Dalje, ker $(f_n)_n$ enakomerno konvergira na $[0, 1]$, je enakomerno Cauchyjevo, zato obstaja $N \in \mathbb{N}$, da za vse $n_1, n_2 \geq N$ in vse $x \in [0, 1]$ velja

$$|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Naj bosta $n_1, n_2 \geq N$. Izberimo poljuben $x < 1$, ki zadošča $|x - 1| < \min\{\delta_{n_1}, \delta_{n_2}\}$. Potem lahko ocenimo

$$|f_{n_1}(1) - f_{n_2}(1)| \leq |f_{n_1}(1) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| + |f_{n_2}(x) - f_{n_2}(1)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

s tem pa je Cauchyjev pogoj dokazan⁵.

V točki b) dokazujemo, da $(f_n)_n$ konvergira enakomerno na $[0, 1]$ proti $\bar{f}$. Naj bo $\epsilon > 0$. Vemo že, da je konvergenca enakomerna na $[0, 1)$. Torej obstaja N_1 , da za vse $n > N_1$ in vse $x \in [0, 1)$ velja

$$|f_n(x) - \bar{f}(x)| < \epsilon.$$

V točki a) smo pokazali, da zaporedje konvergira tudi v točki 1. Obstaja torej N_2 , da za vse $n > N_2$ velja

$$|f_n(1) - \bar{f}(1)| < \epsilon.$$

Če obe oceni združimo, ugotovimo, da za vse $n > \max\{N_1, N_2\}$ in vse $x \in [0, 1]$ velja

$$|f_n(x) - \bar{f}(x)| < \epsilon$$

in dokaz je končan.

Opomba. V točki a) lahko namesto enakomernega Cauchyjevega pogoja neposredno uporabimo enakomerno konvergenco. Razlika je le v tem, da je treba člen $|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)|$ v oceni potem zamenjati z $|f_{n_1}(x) - f(x)| + |f(x) - f_{n_2}(x)|$, namesto treh členov je torej treba oceniti štiri.

Točkovanje.

- Točka a): 9 točk.
- Točka b): 6 točk.

⁵Možen je še bolj eleganten dokaz: naj bo $\epsilon > 0$. Ker je zaporedje $(f_n)_n$ na $[0, 1)$ enakomerno Cauchyjevo, obstaja $N \in \mathbb{N}$, da za vse $n_1, n_2 \geq N$ in vse $x \in [0, 1)$ velja $|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| < \epsilon$. Po zveznosti torej velja tudi $|f_{n_1}(1) - f_{n_2}(1)| = \lim_{x \uparrow 1} |f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| \leq \epsilon$, torej je zaporedje $(f_n(1))_n$ Cauchyjevo.