

Izbrana Poglavja iz Matematike, Prvi izpit

2. junij 2022

Čas pisanja je 105 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

1. naloga (25 točk)

S pomočjo formule $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ (ali kako drugače) pokaži, da je število

$$a = \sin \frac{\pi}{8}$$

algebraično nad $\mathbb{Q}$ in izračunaj njegov minimalni polinom.

2. naloga (25 točk)

Množica zgornjetrikotnih matrik

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

je kolobar glede na običajni operaciji seštevanja in množenja matrik.

- a) (10 točk) Določi vse idempotente v K (tj. matrike $A \in K$, za katere je $A^2 = A$).
- b) (5 točk) Določi vse nilpotente reda 2 v K (tj. matrike $A \in K$, za katere je $A^2 = 0$).
- c) (10 točk) Poišči vse homomorfizme $\phi : K \rightarrow \mathbb{R}$.

3. naloga (25 točk)

Za $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ daljico med x_1 in x_2 označimo

$$\overline{x_1 x_2} := \{(1-t) \cdot x_1 + t \cdot x_2 \mid t \in [0, 1]\}.$$

Množica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je **zvezdasta**, če obstaja $a_0 \in A$, da za vsako točko $a \in A$ velja $\overline{a_0 a} \subseteq A$.

- a) (10 točk) Naj bo $x \in \mathbb{R}^n$ in $r > 0$. Dokaži, da sta odprta kroglja $K(x, r)$ in zaprta kroglja $\overline{K}(x, r)$ zvezdasti množici.
- b) (5 točk) Poišči primer zvezdaste množice, ki ni niti odprta niti zaprta (dokaz ni potreben).
- c) (10 točk) Dokaži, da je vsaka zvezdasta množica povezana s potmi.

4. naloga (25 točk)

Kompleksno ravnino $\mathbb{C}$ opremimo s topologijo končnih komplementov $\mathcal{T}_{KK}$:

$$U \text{ je odprta v } \mathbb{C} \stackrel{\text{def}}{\iff} U = \emptyset \text{ ali } \mathbb{C} \setminus U \text{ je končna.}$$

- a) (5 točk) Dokaži: $F \subseteq \mathbb{C}$ je zaprta natanko tedaj, ko obstaja polinom $p \in \mathbb{C}[x]$, da velja

$$F = \{z \in \mathbb{C} \mid p(z) = 0\}.$$

- b) (10 točk) Določi notranjost in zaprtje množice $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.
- c) (10 točk) Ali je prostor $(\mathbb{C}, \mathcal{T}_{KK})$ kompakten?