

|   |  |
|---|--|
| 1 |  |
| 2 |  |
| 3 |  |
| 4 |  |
| Σ |  |

Ime in priimek

|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|

Vpisna številka

**1. naloga (30 točk)**

a) Izračunaj nedoločeni integral

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{2+e^{2x}}} dx.$$

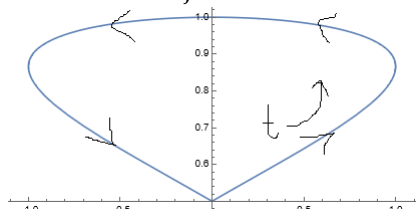
b) Dana naj bo krivulja  $\mathcal{K}$  v parametrični obliki

$$\vec{r}: \left[ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{r}(t) = (-\cos(3t), \sin t).$$

Skiciraj krivuljo  $\mathcal{K}$  in izračunaj ploščino območja, ki ga krivulja  $\mathcal{K}$  omejuje.(Uporabne formule:  $\cos x \cos y = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$ ,  $\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$ )**Rešitev:**Uvedemo novo spremenljivko  $t = e^x$  in dobimo integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{2+t^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{1+(\frac{t}{\sqrt{2}})^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \ln(u + \sqrt{1+u^2}) + C = \ln\left(\frac{e^x}{\sqrt{2}} + \sqrt{1 + \frac{e^{2x}}{2}}\right) + C.$$

Imamo krivuljo oblike



ki omejuje območje ploščine

$$P = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} xy - yx \, dt = \dots = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

## 2. naloga (20 točk)

Dana naj bo številska vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{2an+1} \right)^{2n-1}.$$

Določi vse  $a \geq 0$ , za katere dana vrsta konvergira.

**Rešitev:**

Po korenskem kriteriju dobimo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \frac{n}{2an+1} \right)^{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2a + \frac{1}{n}} \right)^{2 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{4a^2} < 1$$

torej vrsta gotovo konvergira za  $a > \frac{1}{2}$  in divergira za  $a \in [0, \frac{1}{2})$ . Pri  $a = \frac{1}{2}$  pa dobimo vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{2n-1},$$

ker pa je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{2n-1} = \dots = e^{-2}$$

členi vrste ne konvergirajo k 0, torej vrsta divergira. Konvergenčno območje je torej

$$a \in \left( \frac{1}{2}, \infty \right).$$

### 3. naloga (25 točk)

Dana naj bo funkcijska vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}.$$

- a) Določi konvergenčno območje dane funkcijske vrste.
- b) Ali funkcijska vrsta konvergira enakomerno na konvergenčnem območju?
- c) Seštej dano funkcijsko vrsto.

#### Rešitev:

Za  $x = 0$  vrsta očitno konvergira. Naj bo  $x \neq 0$ . Po korenskem kriteriju imamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x^2 e^{-nx}} = e^{-x} < 1 \Leftrightarrow x > 0$$

torej vrsta konvergira natanko tedaj, ko je

$$x \in [0, \infty).$$

Pogledamo supremum funkcije  $x^2 e^{-nx}$  na  $[0, \infty)$ . Izračunamo odvod

$$2xe^{-nx} - nx^2 e^{-nx} = 0$$

torej so kandidati za supremum  $x = 0$ ,  $x = \frac{2}{n}$  in  $x = \infty$ . Maksimum je dosežen v  $x = \frac{2}{n}$  in znaša  $\frac{4}{n^2} e^{-2}$ . Torej

$$\sup_{x \in [0, \infty)} x^2 e^{-nx} \leq \frac{4}{n^2} e^{-2},$$

vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} e^{-2}$$

konvergira, torej po Weierstrassovem kriteriju dobimo, da funkcijska vrsta konvergira enakomerno na  $[0, \infty)$ .

Velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx} = x^2 e^{-x} (1 + e^{-x} + (e^{-x})^2 + (e^{-x})^3 + \dots) = x^2 e^{-x} \frac{1}{1 - e^{-x}}.$$

Rezultat je torej

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx} = \frac{x^2}{e^x - 1}.$$

#### 4. naloga (25 točk)

Dan naj bo sistem diferencialnih enačb

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

a) Poišči splošno rešitev danega sistema diferencialnih enačb.

b) Za vsako naravno število  $n \in \mathbb{N}$  določi splošno rešitev sistema diferencialnih enačb

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 10 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

c) Poišči vse zvezne funkcije  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , za katere je

$$f(x(t), y(t))$$

konstantna funkcija za vsako rešitev sistema enačb

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

**Rešitev:** Lastni vrednosti sta 1 in 9, z ustreznima lastnima vektorjema

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

tako, da je splošna rešitev oblike

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{9t} \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Lastne vrednosti matrike  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 10 \end{bmatrix}^n$  so 1 in  $9^n$ , pri čemer se lastni vektorji isti kot prej, tako da dobimo splošno rešitev

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{9t} \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Za vsako rešitev

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{9t} \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

velja

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

in dobimo

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(x(t), y(t)) \stackrel{zv.}{=} f(0, 0),$$

torej so takšne funkcije le konstante.