

2. kolokvij iz Slučajnih procesov 1
Finančna matematika
2.6.2022

1. Dan je Poissonov proces s funkcijo intenzivnosti $\rho(t) = e^{-t}$.
- (a) Pogojno na dogodek, da se skupaj zgodita točno dva prihoda, izračunaj verjetnost, da je med njima minilo vsaj $d > 0$ časa.
 - (b) Koliko je verjetnost, da na intervalu dolžine $d > 0$ po prvem prihodu T_1 ni bilo nobenega prihoda več? Upoštevaj tudi možnost, da sploh ne pride do nobenega prihoda, pri čemer je pogoj formalno izpolnjen.

Rešitev :

- (a) 1. način : Vemo, da pogojno na $N_\infty = 2$ velja

$$(S_1, S_2) | N_\infty = 2 = (U_{(1)}, U_{(2)})$$

kjer sta $U_{(1)}$ in $U_{(2)}$ vrstilni statistiki neodvisnih spremenljivk $U, V \sim \text{Exp}(1)$. Očitno je potem

$$\mathbb{P}(S_2 - S_1 > d | N_\infty = 2) = \mathbb{P}(|U - V| > d)$$

kar pomeni, da integriramo skupno gostoto

$$f_{U,V}(u, v) = e^{-(u+v)} 1_{[0, \infty) \times [0, \infty)}(u, v)$$

po območju $|u - v| > d$. Dobimo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|U - V| > d) &= 2 \int_{u=d}^{\infty} \int_{v=0}^{u-d} e^{-(u+v)} dv du \\ &= 2 \int_{u=d}^{\infty} e^{-u} - e^{d-2u} du \\ &= e^{-d} \end{aligned}$$

2. način : Pogojno na $T_1 < \infty$ in $N_\infty - N_{T_1} = 1$ je $T_2 \sim \text{Exp}(1)$, neodvisno od T_1 (recimo po krepki lastnosti Markova). Potem je

$$\mathbb{P}(T_2 > d | T_1 < \infty, N_\infty - N_{T_1} = 1) = e^{-d}$$

kar je neodvisno od vrednosti T_1 . Sledi

$$\mathbb{P}(T_2 > d | N_\infty = 2) = \mathbb{E}(\mathbb{P}(T_2 > d | T_1 < \infty, N_\infty - N_{T_1} = 1)) = e^{-d}$$

- (b) Najprej ugotovimo, da je $N_t \sim \text{Exp}(R(t))$, kjer je

$$R(t) = \int_0^t e^{-s} ds = 1 - e^{-t}$$

Sledi $N_\infty \sim \text{Exp}(1)$ in s tem $\mathbb{P}(S_1 = \infty) = \mathbb{P}(N_\infty = 0) = e^{-1}$. Potem imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_2 > d) &= \mathbb{P}(T_2 > d | T_1 < \infty) \mathbb{P}(T_1 < \infty) + \mathbb{P}(T_2 > d | T_1 = \infty) \mathbb{P}(T_1 = \infty) \\ &= \mathbb{P}(T_2 > d | T_1 < \infty) (1 - e^{-1}) + e^{-1}\end{aligned}$$

Bistven del je torej izračun $\mathbb{P}(T_2 > d | T_1 < \infty)$.

1. način : Pogojujmo na vrednost $T_1 = t$. Imamo

$$\mathbb{P}(T_2 > d | T_t = t, T_1 < \infty) = \mathbb{P}(N_{t+d} - N_t = 0) = e^{e^{-(t+d)} - e^{-t}}$$

saj je $N_{t+d} - N_t \sim \text{Pois}(R(t+d) - R(t))$. Rabimo še (pogojno na $T_1 < \infty$) porazdelitev T_1 .

$$F_{T_1}(t) = \mathbb{P}(T_1 \leq t) = \mathbb{P}(N_t > 0) = 1 - e^{e^{-t} - 1}$$

in

$$f_{T_1}(t) = e^{e^{-t} - t - 1}$$

Rezultat tako dobimo z integriranjem

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_2 > d | T_1 < \infty) &= \mathbb{E}(\mathbb{P}(T_2 > d | T_1 < \infty, T_1)) \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P}(T_2 > d | T_t = t) f_{T_1}(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{e^{-(t+d)} - e^{-t}} e^{e^{-t} - t - 1} dt \\ &= e^{-1} \int_0^\infty e^{e^{-(t+d)}} e^{-t} dt \\ &= e^{-1} \int_0^1 e^{ue^{-d}} du \quad (u = e^{-t}) \\ &= e^{d-1} (e^{e^{-d}} - 1)\end{aligned}$$

2. način : Pogojujmo na vrednost $N_\infty = n, n \geq 1$. Po definiciji imamo

$$\mathbb{P}(T_2 > d | N_\infty = 1, T_1 < \infty) = 1$$

Za $n > 1$ je vektor $(S_2, \dots, S_n)$ pogojno $N_\infty = n$ porazdeljen enako kot vektor $(U_{(1)}, \dots, U_{(n-2)})$ vrstilnih statistik neodvisnih spremenljivk $U_i \sim \text{Exp}(1) + T_1$. Podobno kot pri (a) nalogi lahko sklepamo, da je $\mathbb{P}(U_i - S_1 > d) = e^{-d}$ (za $i > 1$ in pogojno na $T_1 < \infty$). Ker so $U_2, \dots, U_n$ neodvisne spremenljivke, imamo

$$\mathbb{P}(T_2 > d | N_\infty = n, T_1 < \infty) = e^{-(n-1)d}$$

Za rezultat moramo torej sešteti vrsto

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(T_2 > d | T_1 < \infty) &= \mathbb{E}(\mathbb{P}(T_2 > d | T_1 < \infty, N_\infty)) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_2 > d | T_1 < \infty, N_\infty = n) \mathbb{P}(N_\infty = n) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n-1)d} \frac{1}{n!} e^{-1} \\
 &= e^{d-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{-d})^n}{n!} \right) \\
 &= e^{d-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{-d})^n}{n!} - 1 \right) \\
 &= e^{d-1} (e^{e^{-d}} - 1)
 \end{aligned}$$

2. Sošolca Arne in Bine tekmujeta v reševanju računskih nalog. Arne za nalogo potrebuje od 1 do 4 minute, Bine pa od 2 do 5 minut (oboje enakomerno porazdeljeno). Vsako nalogo začneta reševati hkrati in vedno počakata, da oba končata z računanjem, preden se takoj lotita nove naloge. Koliko je dolgoročno število Arnetovih zmag na uro?

Rešitev : Označimo z $U \sim U[1, 4]$ oz. $V \sim U[2, 5]$ čas, ki ga potrebuje Arne oz. Bine, da rešita eno nalogo. Predpostavljamo, da sta U in V neodvisna.

Imamo prenovitvetni proces z medprihodnimi časi

$$T_i \sim \max(U, V)$$

z nagradami

$$W_i \sim 1_{\{U < V\}}$$

Za izračun $\mathbb{E}(W_i)$ pogledamo relativno ploščino območja $u < v$ v (u, v) -ravnini znotraj kvadrata $[1, 4] \times [2, 5]$. Iz skice vidimo, da je

$$\mathbb{E}(W_1) = \frac{7}{9}$$

Porazdelitveno funkcijo T_1 dobimo kot produkt porazdelitvenih funkcij

$$\begin{aligned}
 F_U(t) &= \frac{t-1}{3} 1_{[1,4)}(t) + 1_{[4,\infty)}(t) \\
 F_V(t) &= \frac{t-2}{3} 1_{[2,5)}(t) + 1_{[5,\infty)}(t)
 \end{aligned}$$

Dobimo

$$F_{T_1}(t) = F_U(t)F_V(t) = \frac{(t-1)(t-2)}{9} 1_{[2,4)}(t) + \frac{t-2}{3} 1_{[4,5)}(t) + 1_{[5,\infty)}(t)$$

Ker imamo nenagativno slučajno spremenljivko, lahko pričakovano vrednost dobimo z integriranjem preživetvene funkcije

$$\mathbb{E}(T_1) = \int_0^\infty 1 - F_{T_1}(t) dt = \int_0^2 dt + \frac{1}{9} \int_2^4 -t^2 + 3t + 7 dt + \frac{1}{3} \int_4^5 -t + 5 dt$$

$$= 2 + \frac{40}{27} + \frac{1}{6} = \frac{197}{54}$$

Dolgoročno število zmag na minuto je tako

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{t} = \frac{\mathbb{E}(W_1)}{\mathbb{E}(T_1)} = \frac{42}{197} \doteq 0.21$$

ali približno 12.8 zmag na uro.

3. Dano imamo zaporedje neodvisnih prenovitvenih procesov z medprihodnimi časi, ki jih označimo s $T_i^{(n)}$ (za $n = 0, 1, \dots$). Za $n \geq 1$ je medprihodni čas n -tega procesa porazdeljen $T_i^{(n)} \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$, za $n = 0$ pa definiramo $T_i^{(0)} = 0$.

Tvorimo nov prenovitveni proces na naslednji način: medprihodni čas T_i dobimo tako, da najprej neodvisno izberemo število n glede na vrednost slučajne spremenljivke N , ki je porazdeljena $N + 1 \sim \text{Geom}(p)$ (torej $\mathbb{P}(N = n) = p(1 - p)^n$ za $n = 0, 1, \dots$), nato izberemo $T_i = T_i^{(n)}$.

Izračunaj prenovitveno mero tako dobljenega prenovitvenega procesa.

Rešitev :

1. način : Porazdelitveno funkcijo medprihodnega časa lahko izrazimo kot

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_1 < t | N = n) \mathbb{P}(N = n) \\ &= \mathbb{P}(N = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_1 < t | N = n) \mathbb{P}(N = n) \\ &= p + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n p q^n \int_0^t \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda s} ds \end{aligned}$$

kjer smo označili $q = 1 - p$. Njena Laplaceova transformacija pa je

$$\begin{aligned} \hat{F}(z) &= p + \sum_{n=1}^{\infty} p q^n \frac{\lambda^n}{(z + \lambda)^n} \\ &= p \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{q\lambda}{z + \lambda} \right)^n \\ &= \frac{p}{1 - \frac{q\lambda}{z + \lambda}} = \frac{p(z + \lambda)}{p\lambda + z} \end{aligned}$$

(Lahko seveda tudi najprej seštejemo porazdelitveno funkcijo in nato izračunamo Laplaceovo transformacijo).

Za Laplaceovo transformacijo prenovitvene mere dobimo

$$\widehat{M}(z) = \frac{\hat{F}(z)}{1 - \hat{F}(z)} = \frac{\frac{p(z + \lambda)}{p\lambda + z}}{1 - \frac{p(z + \lambda)}{p\lambda + z}} = \frac{p}{q} + \frac{p}{q} \cdot \frac{\lambda}{z}$$

Obrat je

$$M(t) = \frac{p}{q} + \frac{p}{q} \cdot \lambda t$$

2. *način* : Z nekaj razmišljanja lahko opazimo, da bi enako porazdeljen prenovitveni procesi dobili, če bi z verjetnostjo p izbrali $T_i = 0$, z verjetnostjo q pa medprihodne čase $\text{HPP}(\lambda)$, kjer posamezen prihod spet sprejmemo z verjetnostjo p (tako dobimo geometrijsko mnogo eksponentnih spremenljivk oz. gama spremenljivke), kar ima enako porazdeljene prihode kot $\text{HPP}(p\lambda)$ (ker $\text{HPP}(\lambda)$ samo razredčimo). Za tako situacijo smo na vajah izračunali

$$M(t) = \frac{p\lambda}{q}t + \frac{p}{q}$$