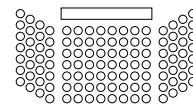


Diskretne strukture 2: 1. izpit

8. junij 2022

Čas reševanja je 120 minut. Vse odgovore utemeljite. Veliko uspeha!

Ime in priimek



Sedež (2.05)

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Naj bosta G in H grafa. Definirajmo nov graf $G \times H$, katerega množica vozlišč je $V(G) \times V(H)$ (kartezični produkt množic) in vozlišči (v_1, v_2) in (u_1, u_2) sosednji, če je v_1 sosed u_1 v G in v_2 sosed u_2 v H . Pozor, to ni isto kot $G \square H$.

a) Nariši $C_3 \times P_3$. Dokaži, da če je G dvodelen, je tudi $G \times H$ dvodelen.

b) Ali je graf $P_3 \times P_3$ ravninski? Ali je graf $C_3 \times C_3$ ravninski? Dokaži, da za $n \geq 5$ graf $K_n \times K_n$ ni ravninski.

2. naloga (25 točk)

Naj bo G graf z n vozlišči in $\overline{G}$ njegov komplement. Dokaži, da za kromatični števili $\chi(G), \chi(\overline{G})$ velja $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \geq n$. Za poljuben n , ki ni praštevilo, poišči graf H z n vozlišči, za katerega velja $\chi(H) \cdot \chi(\overline{H}) = n$, in ne graf H ne $\overline{H}$ ni izomorfen K_n . (Če je naloga pretežka, lahko rešiš varianto, ki ti prinese manj točk, kjer predpostaviš, da je G dvodelen in n sodo število.)

3. naloga (25 točk)

Definirajmo grupo $G_{n,m} = \langle a, b \mid a^n = b^m = e, ab = ba \rangle$ za poljubna $n, m \geq 1$, e je enota grupe.

a) Koliko elementov ima $G_{n,m}$? Kaj je center grupe?

b) Naj bo $n = 16, m = 5$ in $H = \{a^{4i}b^j \mid i \in \{0, 1, 2, 3\}, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$. Dokaži, da je H podgrupa edinka $G_{16,5}$. Koliko elementov ima kvocientna grupa $G_{16,5}/H$? Kateri preprosti grupi je izomorfna $G_{16,5}/H$?

c) Naj velja $n = m = 17$. Poišči taka $x, y \in \mathbb{N}$, da velja $(a^4b^{14})^x(a^7b^3)^y = a$.

4. naloga (25 točk)

a) V kolobarju $\mathbb{Z}_7[x]$ razcepi polinom $x^5 + 6x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 2$.

b) Naj bo $I = \langle x^2 + 5 \rangle = \{p(x)(x^2 + 5) \mid p(x) \in \mathbb{Z}_7[x]\}$ ideal v kolobarju $\mathbb{Z}_7[x]$ (ni potrebno dokazovati, da je ideal). Ali v kvocientnem kolobarju $\mathbb{Z}_7[x]/I$ velja $(x^7 + I)(x + 1 + I) = 3 + I$? Poišči tri elemente v $\mathbb{Z}_7[x]/I$, ki so delitelji ničla.

c) V $\mathbb{Z}_9[x]$ poišči netrivialen ideal J , da ima $\mathbb{Z}_9[x]/J$ neskončno elementov. Svojo trditev dokaži.