Analiza 1: 1. izpit
13. 6. 2022

Naloga iz teorije (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.
Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

P Zaporedje z realnimi členi ima lahko neštevno mnogo stekališč.

P Funkcija $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, je enakomerno zvezna.

P Število $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ je racionalno.

N Če je $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ zvezna in integral $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergira, potem je $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

N Če ima funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v točki $a \in \mathbb{R}$ lokalni ekstrem, je v tej točki tudi odvedljiva.

N Taylorjeva vrsta funkcije $f(x) = |x|$ v okolici točke $x = 1$ ima konvergenčni radij 1.

N Vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ lahko preuredimo tako, da je njena vsota enaka π.

P Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Množici $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^n$ sta ekvipolentni.

P Za vsa števila $x, y \in \mathbb{R}$ velja $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

N Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira enakomerno na $[0, 1]$, potem absolutno konvergira na $[0, 1]$.

Točkovanje.

- Vsak pravilni odgovor: 2 točki.
- Prvi nepravilni odgovor: 0 točk.
- Vsak nadaljnji nepravilni odgovor: -2 točki.

1. naloga (10 točk)

Izračunaj nedoločeni integral

$$\int \frac{\sin^3 x \cos x}{(1+\sin^4 x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev. Vpeljemo novo spremenljivko $t = 1 + \sin^4 x,\ \mathrm{d}t = 4\sin^3 x \cos x\,\mathrm{d}x$. Dobimo

$$\int \frac{\sin^3 x \cos x}{(1+\sin^4 x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{1}{4t} + C = -\frac{1}{4+4\sin^4 x} + C.$$

Opomba. Vpeljali bi lahko tudi $t = \sin x$ ali $t = \sin^2 x$ ter dobili integral racionalne funkcije.

Točkovanje.

- Izračun: 10 točk.

2. naloga (15 točk)

Za $\varphi \in (\pi, \infty)$ je podana polarna krivulja s predpisom

$$r(\varphi) = \frac{\varphi}{\varphi - \pi}.$$

Določi njeno vodoravno asimptoto in jo skiciraj. Bodi pozoren tudi na obnašanje krivulje, ko gre $\varphi \to \infty$. Poišči enačbo njene tangente pri vrednosti $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

Rešitev. Funkcija $r(\varphi) = \frac{\varphi}{\varphi - \pi}$ je omejena povsod, razen pri $\varphi = \pi$, kjer ima pol. Linearna asimptota $y = kx + n$ (če obstaja), mora biti torej vzporedna poltraku $r = \pi$, kar pomeni, da je njen smerni koeficient enak $k = 0$, tj. je vodoravna asimptota. Poiskati moramo še n:

$$n = \lim_{\varphi \downarrow \pi} (y(\varphi) - kx(\varphi)) = \lim_{\varphi \downarrow \pi} y(\varphi) = \lim_{\varphi \downarrow \pi} r(\varphi) \sin(\varphi) = \lim_{\varphi \downarrow \pi} \frac{\varphi}{\varphi - \pi} \sin(\varphi) = -\pi.$$

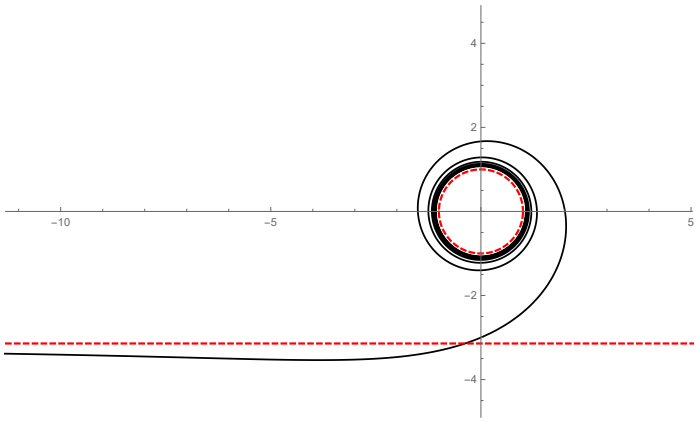
Vodoravna asimptota ima zato enačbo

$$y = -\pi.$$

Opazimo lahko še, da je $r(\varphi)$ padajoča funkcija in velja

$$\lim_{\varphi \to \infty} r(\varphi) = \lim_{\varphi \to \infty} \frac{\varphi}{\varphi - \pi} = 1,$$

kar pomeni, da se krivulja za $\varphi \to \infty$ vedno bolj približuje krožnici $r = 1$ in se "navija nanjo"[1]:



Izračunajmo še enačbo tangente pri $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$. Najprej opazimo, da je

$$x(\varphi_0) = \frac{\varphi_0}{\varphi_0 - \pi} \cos \varphi_0 = 0 \quad \text{in} \quad y(\varphi_0) = \frac{\varphi_0}{\varphi_0 - \pi} \sin \varphi_0 = -3.$$

Potrebujemo še smerni koeficient. V ta namen najprej izračunamo

$$\dot{x}(\varphi_0) = \dot{r}(\varphi_0) \cos \varphi_0 - r(\varphi_0) \sin \varphi_0 = 3 \quad \text{in} \quad \dot{y}(\varphi_0) = \dot{r}(\varphi_0) \sin \varphi_0 + r(\varphi_0) \cos \varphi_0 = \frac{4}{\pi}.$$

Torej je $k_T = \frac{\dot{y}(\varphi_0)}{\dot{x}(\varphi_0)} = \frac{4}{3\pi}$, enačba tangente pa je

$$y + 3 = \frac{4}{3\pi} x \quad \text{oziroma} \quad y = \frac{4x}{3\pi} - 3.$$

Točkovanje.

- Asimptota: 5 točk.
- Limita, ko gre $\varphi \to \infty$: 2 točki.
- Skica: 3 točke.
- Tangenta: 5 točk.

[1] Pokazati se da, da krivulja seka vodoravno asimptoto natanko enkrat, vendar tega nismo zahtevali, zato nisem odbijal točk, če to ni bilo razvidno iz skice. Prav tako ni bil zahtevan izračun stacionarnih točk.

3. naloga (20 točk)

Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je podano z začetnima členoma $a_0 = 1$ in $a_1 = 1$ ter rekurzivno zvezo

$$a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1},\ n \in \mathbb{N}.$$

Seštej potenčno vrsto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in določi njen konvergenčni radij. Rezultat je racionalna funkcija, v tej obliki jo tudi zapiši.

Rešitev. Vsoto potenčne vrste označimo $F(x)$. Iz rekurzivne zveze potem sledi

$$\begin{aligned} F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \\ &= 1 + x + 4x \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} - 4x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} \\ &= 1 + x + 4x(F(x) - 1) - 4x^2 F(x). \end{aligned}$$

Od tod izračunamo

$$F(x) = \frac{-3x + 1}{4x^2 - 4x + 1}.$$

Izračun ima smisel za $|x| < R$, kjer je R konvergenčni radij potenčne vrste. Konvergenčni radij je najlažje izračunati iz eksplicitne formule za zaporedje $(a_n)_n$. Iz rekurzivne zveze dobimo karakteristično enačbo

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0,$$

od koder dobimo

$$\lambda_{1,2} = 2.$$

Torej velja

$$a_n = (C + Dn)2^n.$$

Iz $a_0 = a_1 = 1$ sledi $C = 1$ in $D = -\frac{1}{2}$. Torej je

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 2 \qquad \text{in zato} \qquad R = \frac{1}{2}.$$

Opomba. Taylorjeva vrsta racionalne funkcije ima konvergenčni radij vedno enak razdalji od središča razvoja do najbližjega pola (to lahko pokažemo npr. z uporabo razcepa na parcialne ulomke). Konvergenčni radij bi se tako dalo dobiti tudi brez reševanja rekurzivne enačbe. (Po drugi strani se da potenčno vrsto sešteti tudi tako, da najprej rešimo rekurzivno enačbo in nato v dobljeni potenčni vrsti prepoznamo vsoto geometrijske vrste in odvoda geometrijske vrste.)

Točkovanje.

- Vsota vrste (in izračun): 10 točk.
- Konvergenčni radij (in izračun): 10 točk.

4. naloga (20 točk)

Naj bosta M množica vseh zaporedij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ z lastnostjo $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ in $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ preslikava podana s predpisom

$$d\left((a_n),(b_n)\right) = \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|.$$

a) Utemelji, zakaj zgornji maksimum vedno obstaja, in dokaži, da je d metrika.

b) Naj bo $A \subset M$ množica vseh zaporedij (a_n), za katera vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. Ali je A odprta?

c) Naj bo $f : M \to M$ preslikava s predpisom $f((a_n)) = (\frac{a_n}{n})$. Ali je f zvezna?

Rešitev. Točka a): za obstoj maksimuma obravnavamo dva primera. Če je $|a_n - b_n| = 0$ za vse n, maksimum obstaja in je enak 0. Če pa obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $|a_{n_0} - b_{n_0}| =: A > 0$, pa po definiciji limite obstaja $N \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq N$ velja $|a_n - b_n| < A$. Naj bo $n_{\max} \in \{1, \ldots, N-1\}$ tak indeks, da je

$$M := |a_{n_{\max}} - b_{n_{\max}}| = \max_{1\leq n<N} |a_n - b_n|.$$

Tak indeks obstaja, ker izmed končno mnogo števil vedno lahko izberemo največje. Potem je

$$M = \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|,$$

saj po konstrukciji velja $M \geq |a_n - b_n|$ za vse n, hkrati pa je število M enako enemu od členov.

Dokažimo še, da je d metrika. Pišimo $\mathbf{a} := (a_n)$, $\mathbf{b} := (b_n)$ in $\mathbf{c} := (c_n)$.

- Pozitivnost: očitno je $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) \geq 0$ in $d(\mathbf{a},\mathbf{a}) = 0$. Obratno, iz $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n| = 0$ sledi, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $|a_n - b_n| = 0$ in zato $a_n = b_n$, to pa pomeni ravno $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.
- Simetričnost: je očitna, saj vedno velja $|a_n - b_n| = |b_n - a_n|$ in zato $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = d(\mathbf{b},\mathbf{a})$.
- Trikotniška neenakost: za vse n velja $|a_n - b_n| \leq |a_n - c_n| + |c_n - b_n|$, torej je
  $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n| \leq \max_{n\in\mathbb{N}}(|a_n - c_n| + |c_n - b_n|) \leq \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n - c_n| + \max_{n\in\mathbb{N}} |c_n - b_n| = d(\mathbf{a},\mathbf{c}) + d(\mathbf{c},\mathbf{b})$.

Točka b): A ni odprta. Naj bo namreč $\mathbf{0}$ zaporedje, ki je konstantno enako 0. Potem očitno velja $\mathbf{0} \in A$. Toda, če izberemo odprto kroglo $K(\mathbf{0},\epsilon)$, kjer je $\epsilon > 0$ poljuben, bo le-ta vsebovala tudi zaporedje $(\frac{\epsilon}{2n})_n$, toda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2n}$ ne konvergira. Torej poljubna odprta krogla okrog $\mathbf{0}$ seka tako A kot tudi $M \setminus A$. Torej $\mathbf{0} \in A$ ni notranja točka množice A in zato A ni odprta.

Točka c): preslikava f je zvezna. Velja namreč

$$d(f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b})) = \max_{n\in\mathbb{N}} |f(a_n) - f(b_n)| = \max_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}|a_n - b_n| \leq \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n| \leq d(\mathbf{a},\mathbf{b}),$$

od koder sledi, da je f enakomerno zvezna[2].

Točkovanje.

- Obstoj maksimuma: 4 točke.
- Dokaz, da je d metrika: 4 točke.
- Dokaz, da A ni odprta: 6 točk.
- Dokaz, da je f zvezna: 6 točk.

[2]Naj bo namreč $\epsilon > 0$. Če je $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) < \delta := \epsilon$, potem je $d(f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b})) < \epsilon$.

5. naloga (15 točk)

Dana je omejena zvezna funkcija $f_0 : (0,\infty) \to (0,\infty)$. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo funkcije $f_n : (0,\infty) \to (0,\infty)$ rekurzivno s formulo

$$f_n(x) := \int_0^x f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Dokaži, da posplošeni integral

$$\int_0^\infty \frac{f_n(x)}{1+x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

konvergira, če je $\alpha > n+1$, in divergira, če je $\alpha \leq n$.

Rešitev. Ker je f_0 omejena, obstaja konstanta $M > 0$, da za vse $x > 0$ velja

$$0 < f_0(x) \leq M. \tag{†}$$

Od tod z indukcijo lahko pokažemo, da je f navzgor omejena s potenčno funkcijo:

$$0 < f_n(x) \leq \frac{M}{n!}x^n. \tag{‡}$$

Baza indukcije je ravno (†). Induktivno privzemimo, da velja (‡) za $n = k$ in dokažimo, da (‡) potem velja tudi za $n = k+1$. Po indukcijski predpostavki za $t > 0$ velja:

$$0 < f_k(t) \leq \frac{M}{k!}t^k.$$

Od tod z integracijo dobimo

$$0 < \int_0^x f_k(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x \frac{M}{k!}t^k\,\mathrm{d}t = \frac{M}{(k+1)!}x^{k+1},$$

kar pa je ravno trditev za $n = k+1$. S tem smo dokazali, da (‡) velja za vse $n \in \mathbb{N}_0$.

Za $n \in \mathbb{N}$ torej velja

$$\int_0^\infty \frac{f_n(x)}{1+x^\alpha}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^\infty \frac{M}{n!}\frac{x^n}{1+x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\frac{Mx^\alpha}{n!(1+x^\alpha)}}{x^{\alpha-n}}\,\mathrm{d}x,$$

pri čemer za vse $\alpha \in \mathbb{R}$ obstaja limita

$$\lim_{x\to\infty} \frac{Mx^\alpha}{n!(1+x^\alpha)}.$$

Po kriteriju za konvergenco posplošenih integralov v neskončnosti torej integral konvergira, če je $\alpha - n > 1$, od koder sledi prvi rezultat.

Podobno lahko induktivno najdemo polinomsko spodnjo mejo za funkcije f_n. Najprej si oglejmo funkcijo f_1, za katero po definiciji velja

$$f_1(x) = \int_0^x f_0(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_0^1 f_0(t) =: N > 0, \qquad x \geq 1. \tag{∗}$$

Trdimo, da od tod sledi, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja:

$$f_n(x) \geq \frac{N}{(n-1)!}(x-1)^{n-1}, \qquad x \geq 1. \tag{⋆}$$

Baza indukcije je ravno (∗). Induktivno privzemimo, da velja (⋆) za $n = k$ in dokažimo, da (⋆) potem velja tudi za $n = k+1$. Po indukcijski predpostavki za $t > 1$ velja:

$$f_k(t) \geq \frac{N}{(k-1)!}(t-1)^{k-1},$$

od koder z integracijo dobimo

$$f_{k+1}(t) = \int_0^x f_k(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_1^x f_k(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_1^x \frac{N}{(k-1)!}(t-1)^{k-1}\,\mathrm{d}t = \frac{N}{k!}(x-1)^k.$$

S tem smo dokazali, da $(\star)$ velja za vse $n \in \mathbb{N}$.

Za $n \in \mathbb{N}$ torej velja

$$\int_0^\infty \frac{f_n(x)}{1+x^\alpha}\,\mathrm{d}x \geq \int_1^\infty \frac{N}{(n-1)!}\frac{(x-1)^{n-1}}{1+x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{\frac{N}{(n-1)!}\frac{(x-1)^{n-1}}{1+x^\alpha}x^{\alpha-n+1}}{x^{\alpha-n+1}}\,\mathrm{d}x,$$

pri čemer je za $\alpha > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N}{(n-1)!}\frac{(x-1)^{n-1}}{1+x^\alpha}x^{\alpha-n+1} = \frac{N}{(n-1)!} \neq 0,$$

za $\alpha \leq 0$ pa je že kar sam integrand na intervalu $[2,\infty)$ navzdol omejen s pozitivno konstanto $\frac{N}{2(n-1)!}$. V obeh primerih torej po kriteriju za divergenco posplošenih integralov v neskončnosti divergira, če je $\alpha - n + 1 \leq 1$, od koder sledi še drugi rezultat.

Točkovanje.

- Konvergenca (in dokaz): 7 točk.
- Divergenca (in dokaz): 8 točk.