

1. Dana je družina parabol $y = x^2 - 4(a - 1)x + 2a$, ($a \in \mathbb{R}$).

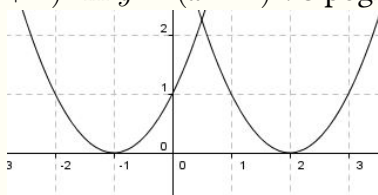
- (a) Obravnavajte presečišča parabol z abscisno osjo.
 (b) Določite enačbi parabol, ki se dotikata abscisne osi, narišite njuna grafa in izračunajte ploščino lika ograjenega s parabolama in abscisno osjo.

Rešitev

(a) V odvisnosti od parametra a so presečišča parabole z abscisno osjo $2a - 2 \pm \sqrt{4a^2 - 10a + 4}$. Torej

- Za $\frac{1}{2} < a < 2$ presečišč ni.
- Za $a \in \{\frac{1}{2}, 2\}$ imamo dotikališča v $x = 2$ ($a = 2$), oz. $x = -1$ ($a = \frac{1}{2}$).
- Za $a \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (2, \infty)$ imamo dve presečišči in sicer $2a - 2 \pm \sqrt{4a^2 - 10a + 4}$.

(b) Z absciso dotikajoči se paraboli dobimo pri $4a^2 - 10a + 4 = 0$, torej za $a = 2$ in $a = \frac{1}{2}$. Iskani paraboli sta $y = (x + 1)^2$ in $y = (x - 2)^2$. S pogledom na sliko



ugotovimo, da je iskana ploščina enaka

$$2 \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (x + 1)^2 dx = \frac{9}{4}.$$

2. Dani sta točki $A(2, -1, -3)$ in $B(5, -1, -7)$. Določite koordinate točke $C(-2, 4, z)$ tako, da bosta vektorja $\vec{AB}$ in $\vec{AC}$ pravokotna. Tedaj izračunajte ploščino trikotnika $\triangle ABC$ in napišite enačbo ravnine, ki vsebuje točke A, B in C .

Rešitev

Iz skalarnega produkta ustreznih vektorjev hitro izračunamo, da je $z = -6$ in torej $C(-2, 4, -6)$. Vektorski produkt $\vec{AB} \times \vec{AC} = (20, 25, 15)$. Ker je absolutna vrednost tega vektorja $25\sqrt{2}$, je ploščina trikotnika enaka $\frac{25\sqrt{2}}{2}$. Normala naše ravnine je pa $\vec{n} = (4, 5, 3)$ in njena enačba $4x + 5y + 3z + 6 = 0$.

3. Dana je neskončna geometrijska vrsta $(a + 1) + (3 - 2a) + \dots$.

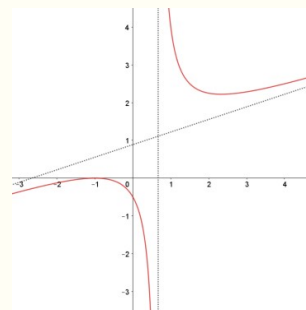
- (a) Kolikšen mora biti a , da bo vrsta konvergentna?
 (b) Tedaj izračunajte vsoto vrste!
 (c) Določite a tako, da bo vsota vrste najmanjša!

Rešitev

- (a) Količnik je $q = \frac{3-2a}{a+1}$. Iz slike preproste racionalne funkcije ali iz računa ugotovimo, da je $|q| < 1$ za $\frac{2}{3} < a < 4$.
- (b) Tedaj hitro izračunamo, da je neskončna vsota enaka $\frac{(a+1)^2}{3a-2}$.
- (c) Lahko si pomagamo z grafom racionalne funkcije $\frac{(a+1)^2}{3a-2}$ in odvodom $\left(\frac{(a+1)^2}{3a-2}\right)' = \frac{3a^2-4a-7}{9a^2-12a+4}$, ki je enak 0 pri $a = -1$ in pri $a = \frac{7}{3}$.

Očitno funkcija na intervalu $(\frac{2}{3}, 4)$ doseže minimum (vrednost je $\frac{20}{9}$) pri $a = \frac{7}{3}$.

Če računamo le z odvodom, bi za določitev/potrditev minimuma morali izračunati še drugi odvod **ALI** iz vsote (točka b) sklepati, da vsota (na intervalu $(\frac{2}{3}, \infty)$) zvezna funkcija $\frac{(a+1)^2}{3a-2}$ pri $a = \frac{7}{3}$ gotovo ne doseže maksimuma, saj se vsota s približevanjem a vrednosti $\frac{2}{3}$ in vrednosti ∞ večja v neskončnost.

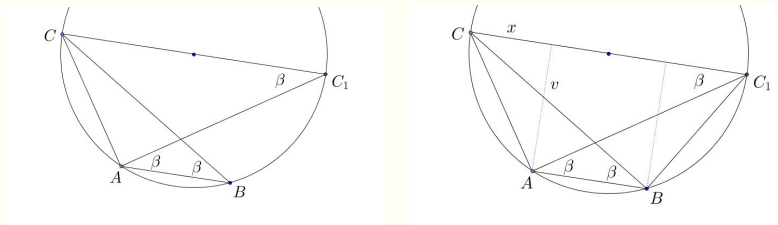


4. Dan je trikotnik $\triangle ABC$ s podatki $a = 40$, $b = 30$, $\alpha - \beta = 90^\circ$. Trikotniku očrtamo krog in skozi točko C narišemo premer CC_1 .

- (a) Dokažite, da je CC_1 vzporedno AB .
 (b) Izračunajte površino in prostornino vrtenine, ki nastane z vrtenjem trikotnika $\triangle ABC$ okoli premera CC_1 .

Rešitev

- (a) Ob prvi skici



sklepamo takole: Če narišemo AC_1 , vemo, da je po talesovem izreku $\angle C_1AC = 90^\circ$. Ker pa je $\alpha = 90^\circ + \beta$ je $\angle BAC_1 = \beta$. Ker je obodni kot nad isto tetivo enak je $\angle CC_1A = \beta$. Kota ob nosilki AC_1 sta enaka (izmenična) in CC_1 , AB sta torej vzporedni.

- (b) Ob pogledu na drugo sliko ugotovimo, da je trapez CC_1BA enakokrak. Zaradi simetrije in ker je kot $\angle C_1AC = 90^\circ$ po pitagorovem izreku izračunamo, da je premer $CC_1 = 50$. Če nastavimo enačbi

$$\begin{aligned}x^2 + v^2 &= 30^2 \\(50 - x)^2 + v^2 &= 40^2\end{aligned}$$

izračunamo $x = 18$ in $v = 24$ (skica).

Iste vrednosti lahko hitro izračunamo tudi po sinusovem izreku. Iz osnovnega trikotnika $\triangle ABC$ po sinusovem izreku takoj dobimo $\tan \beta = \frac{3}{4}$ in $\cos \beta = \frac{4}{5}$ ter $\sin \beta = \frac{3}{5}$ od koder takoj izračunamo iste vrednosti $x = 18$ in $v = 24$ (β pri C).

Površina je vsota površin plaščev dveh stožcev (enega z radijem $v = 24$ in robom $b = 30$ ter drugega z istim radijem in robom $a = 40$) in plašča valja z istim radijem in višino (v trikotniku $c = 14$) $14(= 50 - 2 \cdot 18)$. Torej $P = v \cdot b \cdot \pi + v \cdot a \cdot \pi + 2 \cdot v \cdot c \cdot \pi = v \cdot \pi \cdot (a + b + 2c) = 24 \cdot \pi \cdot (40 + 30 + 28) = 2352\pi$.

Prostornino dobimo podobno $V = \pi \cdot v^2 \cdot x \cdot \frac{1}{3} + \pi \cdot v^2 \cdot c - \pi \cdot v^2 \cdot (c + x) \cdot \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot \pi \cdot v^2 \cdot c}{3} \pi = \frac{2 \cdot \pi \cdot 24^2 \cdot 14}{3} \pi = 5376\pi$.

5. Dvaintrideset igralcev si naključno razdeli dvaintrideset (različnih) barvnih kart (taroka). Vsakdo pozna le svojo karto. Karte narobe obrnjene postavijo na mizo in jih premešajo ter obrnejo tako, da so vidne. Prvi igralec zatem z zavezanimi očmi naključno vzame eno karto. Zatem vsi ostali igralci drug za drugim iz mize vzamejo svojo karto, če je le ta še na mizi. Če karte igralca, ki je na vrsti, ni na mizi, igralec vzame naključno od preostalih kart. Kolikšna je verjetnost, da bo zadnji igralec dobil svojo karto?

Kaj pa če igra štiriinpetdeset igralcev z vsemi štiriinpetdesetimi (različnimi) kartami (taroka)?

Rešitev

Verjetnost je $\frac{1}{2}$ in je neodvisna od števila igralcev (kart), če je število igralcev ($n > 1$).

Dokaz: Rešimo nalogo za n igralcev. Verjetnost, da bo n -ti (zadnji) igralec dobil svojo karto označimo s $P(n)$.

Poenostavimo in si zaporedne igralce in njihove karte, zaporedno oštevilčimo $1, 2, 3, \dots, n$.

- Če prvi igralec vzame svojo karto (verjetnost $\frac{1}{n}$), bodo vsi ostali igralci (vključno z zadnjim) vzeli svojo karto z verjetnostjo 1.
- Če je $n \geq 3$ in prvi igralec izbere k -to karto, kjer je $1 < k < n$, bodo igralci $2, \dots, k-1$ vzeli vsak svojo karto. Sedaj se k -ti igralec obnaša identično kot bi se obnašal prvi igralec v igri s $n - k + 1$ igralci (kartami). Izbere namreč naključno karto, pri čemer lahko 1-vo karto smatramo kot njegovo (če namreč k -ti igralec izbere 1-vo karto, bi imela 1-vi in k -ti igralec zamenjani karti). Če je torej prvi igralec izbral k -to karto, bo n -ti igralec dobil svojo karto z verjetnostjo $P(n - k + 1)$.

Ker lahko prvi igralec izbere poljubno karto, torej velja

$$P(n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}P(n-1) + \frac{1}{n}P(n-2) + \dots + \frac{1}{n}P(2)$$

$$P(n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \left(\sum_{i=2}^{n-1} P(i) \right)$$

Z indukcijo sedaj pokažemo, da je $P(n) = \frac{1}{2}$ za vsak n .

- Za $n = 2$ je očitno $P(2) = \frac{1}{2}$.
- Pri predpostavki $P(i) = \frac{1}{2}$ za vsak $i < n$ izračunamo

$$P(n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \left(\sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot (n-2) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$