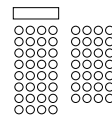


Diskretne strukture 2: 2. izpit

20. junij 2022

Čas reševanja je 120 minut. Vse odgovore utemeljite. Veliko uspeha!

Ime in priimek



Sedež (2.02)

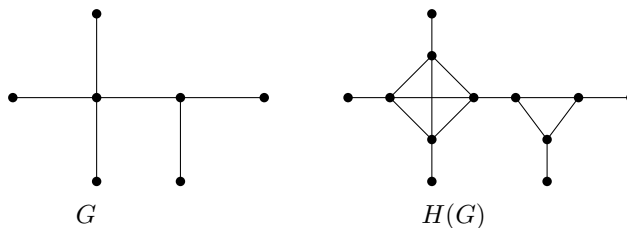
--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (50 točk)

Naj bo G graf. Iz G dobimo nov graf $H(G)$, tako da vsako vozlišče v iz G zamenjamo z grafom $K_{\deg(v)}$ in za vsako povezavo uv v G dodamo povezavo med različnimi vozlišči pripadajočih $K_{\deg(u)}$ in $K_{\deg(v)}$. Glej sliko za primer.



a) Naj bo G povezan graf z n vozlišči in m povezavami. Koliko vozlišč ima $H(G)$? Če dodatno predpostaviš, da je G k -regularen, koliko povezav ima $H(G)$?

b) Naj bo G hamiltonov graf. Dokaži, da je tudi $H(G)$ hamiltonov. Najdi graf G' , da G' ni hamiltonov, $H(G')$ pa je hamiltonov.

c) Naj bo T drevo. Izpelji formulo, ki pove, koliko vpetih dreves ima $H(T)$ v odvisnosti od stopenj vozlišč v T . Poračunaj število vpetih dreves na grafu G iz zgornje slike in tako preveri svojo formulo. Namig: spomni se, da ima K_n natanko n^{n-2} vpetih dreves.

d) Najdi tak G , da je G ravninski in $H(G)$ ni ravninski. Svojo trditev dokaži.

e) Naj bo T drevo z maksimalno stopnjo $\Delta(T) \leq 4$. Dokaži, da je $H(T)$ ravninski graf. Namig: indukcija.

2. naloga (25 točk)

Naj bo G_p grupa obrnljivih zgoraj trikotnih 2×2 matrik s koeficienti iz $\mathbb{Z}_p$ in operacijo množenje matrik po modulu p , kjer je p praštevilo.

a) Koliko elementov ima G_p ? Ali je G_p abelova grupa? Poišči element reda 5 v G_5 .

b) V G_{103} poišči inverz elementa $\begin{bmatrix} 13 & 55 \\ 0 & 85 \end{bmatrix}$.

c) Naj bo H podgrupa vseh obrnljivih diagonalnih matrik v G_5 . Kateri izmed sledečih grup z operacijo seštevanja je H izomorfna: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_{16}$? Svoj odgovor dokaži.

3. naloga (25 točk)

a) V $\mathbb{Z}_2[x]$ razcepi $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x^1$.

b) Naj bo $I = \langle x^2 + x + 1 \rangle = \{p(x)(x^2 + x + 1) \mid p(x) \in \mathbb{Z}_2[x]\}$ ideal v kolobarju $\mathbb{Z}_2[x]$ (ni potrebno dokazovati, da je ideal). Koliko elementov ima kvocientni kolobar $\mathbb{Z}_2[x]/I$? Koliko je red elementa $x + 1 + I$ za operacijo množenja v $\mathbb{Z}_2[x]/I$?

c) Naj bo $I_2 = \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \mid a_i \in \{0, 2\} \forall i, n \in \mathbb{N}_0\}$ ideal v kolobarju $\mathbb{Z}_4[x]$ (ni potrebno dokazovati, da je ideal). Koliko elementov ima kvocientni kolobar $\mathbb{Z}_4[x]/I_2$? Ali velja $3x^3 + 2x^2 + 2x + 1 + I_2 = x^3 + 3 + I_2$? Ali je $\mathbb{Z}_4[x]/I_2$ cel kolobar?