1	
2	
3	
4	
Σ	

ANA2 IŠRM, 2.izpit

22. junij 2022

$10^{00} - 12^{00}$ Predavalnice: VFP

Ime in priimek ______________________ Vpisna številka

1. naloga (25 točk)

a) Izračunaj nedoločeni integral

$$\int \frac{1}{4 + 5\cos x}\, dx\,.$$

b) Dana naj bo krivulja $\mathcal{K}$ v implicitni obliki

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2\,.$$

Skiciraj krivuljo $\mathcal{K}$ in izračunaj ploščino območja, ki ga krivulja $\mathcal{K}$ omejuje.

Rešitev:

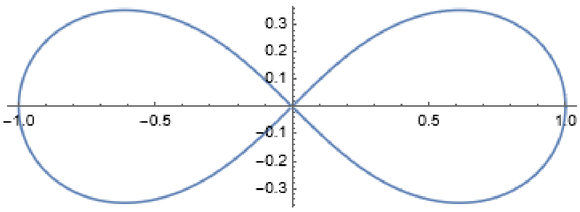
Uporabimo univerzalno substitucijo $t = \tan\frac{x}{2}$ in dobimo integral

$$\int \frac{2\,dt}{9 - t^2} = \int \frac{2\,dt}{(3-t)(3+t)} = A\ln|3 - t| + B\ln|3 + t| = ...(A = -\frac{1}{3},\ B = \frac{1}{3})... =$$

$$\frac{1}{3}\ln|\frac{3+t}{3-t}| + C = \frac{1}{3}\ln|\frac{3+\tan\frac{x}{2}}{3-\tan\frac{x}{2}}| + C\,.$$

V polarnih koordinatah imamo

$$r = \sqrt{\cos(2\varphi)}$$



Ploščina je

$$4\,\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\varphi)\, d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\varphi)\, d\varphi = \sin(2\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1\,.$$

2. naloga (25 točk)

Za katere $a \in \mathbb{R}$ konvergira posplošeni integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}(1-e^{2x})}{x}\,dx\,.$$

Rešitev:
Velja

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-ax}(1-e^{2x})}{x} = -2\,,$$

torej pri spodnji meji integrala ni težav.
Pri zgornji meji ($x=\infty$) imamo

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{(2-a)x}}{x}\,dx\,.$$

Če je $a>2$, potem so vsi eksponenti negativni in zdi se da bo v tem primeru integral konvergiral.
Naj bo $a>2$, imamo

$$\int_0^\infty \frac{x(e^{-ax}-e^{(2-a)x})}{x^2}\,dx\,,$$

ker je

$$\lim_{x\to\infty} x(e^{-ax}-e^{(2-a)x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{ax}} - \frac{x}{e^{(a-2)x}} = L'Hop = 0\,,$$

torej integral konvergira.
Če je pa $a \in [0,2]$, pa imamo

$$\lim_{x\to\infty} e^{-ax}-e^{(2-a)x} = -\infty\,,$$

ter za $a<0$, pa je

$$\lim_{x\to\infty} e^{-ax}(1-e^{2x}) = -\infty\,,$$

torej integral konvergira natanko tedaj, ko je

$$a \in (2,\infty)\,.$$

3. naloga (25 točk)

Dana naj bo potenčna vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)\,n!}\,.$$

a) Določi konvergenčno območje dane potenčne vrste.

b) Seštej potenčno vrsto.

Rešitev:
Konvergenčni radij je ∞, tako da vrsta konvergira za vse $x \in \mathbb{R}$.
Označimo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)\,n!}\,.$$

Potem je

$$x^2 f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)\,n!}\,.$$

Imamo

$$(x^2 f(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = xe^x$$

Torej je

$$x^2 f(x) = xe^x - e^x + C \Rightarrow f(x) = \frac{xe^x - e^x + C}{x^2}$$

Ker je $f(0) = 0$, mora biti $C = 1$, torej je rezultat

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)\,n!} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}\,.$$

4. naloga (25 točk)

a) Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y'' - 4y' + 3y = xe^x + 1\,.$$

b) Poišči vse $A \in \mathbb{R}$, za katere ima diferencialna enačba

$$y'' - 4y' + 3y = A\,y \quad \text{pri pogojih} \quad y(0) = y(1) = 0$$

neničelne rešitve.

Rešitev:

Imamo karakteristični polinom

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 3\,,$$

torej je

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{3x}\,.$$

Za partikularno rešitev imamo nastavek

$$y_p = A + (Bx + C)xe^x$$

kar vstavimo v enačbo in dobimo

$$A = \frac{1}{3} \qquad B = C = -\frac{1}{4}\,,$$

$$y_{spl.} = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}(x^2 + x)e^x\,.$$

Imamo diferencialno enačbo

$$y'' - 4y' + (3 - A)y = 0$$

karakteristični polinom je

$$\lambda^2 - 4\lambda + (3 - A) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{1 + A}$$

Če je $A = -1$ imamo splošno rešitev

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

in če upoštevamo $y(0) = y(1) = 0$, dobimo $C_1 = C_2 = 0$, torej tu ni neničelnih rešitev.

Naj bo $A \neq -1$. Potem imamo

$$y = C_1 e^{(2+\sqrt{1+A})x} + C_2 e^{(2-\sqrt{1+A})x}$$

in če upoštevamo $y(0) = y(1) = 0$, dobimo

$$C_1 + C_2 = 0 \qquad C_1 e^{2+\sqrt{1+A}} + C_2 e^{2-\sqrt{1+A}} = 0$$

Če hočemo netrivialne rešitve, mora biti determinanta sistema enaka 0:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{2+\sqrt{1+A}} & e^{2-\sqrt{1+A}} \end{vmatrix} = e^{2-\sqrt{1+A}} - e^{2+\sqrt{1+A}}$$

Velja pa

$$e^{2-\sqrt{1+A}} = e^{2+\sqrt{1+A}} \Leftrightarrow e^{2\sqrt{1+A}} = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{1+A} = i\,2\pi n \Leftrightarrow A = -1 - \pi^2 n^2\,.$$