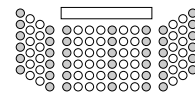


### Analiza 3: 2. izpit

29. 6. 2022 10<sup>00</sup>

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Vse odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

Ime in priimek \_\_\_\_\_



Sedež (2.01)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|

Vpisna številka

|          |  |
|----------|--|
| 1        |  |
| 2        |  |
| 3        |  |
| 4        |  |
| $\Sigma$ |  |

## 1. naloga

Dan naj bo integral s parametrom

$$I_n(a) = \int_1^\infty \frac{dt}{t\sqrt{1+a^nt^4}},$$

kjer je  $n \in \mathbb{N}$ .

a) Določi konvergenčno območje danega integrala s parametrom v odvisnosti od  $n$  in preveri, da je  $I_n(a)$  odvedljiva funkcija za vse  $n \in \mathbb{N}$ .

b) Izračunaj  $I'_n(a)$ .

### Rešitev:

Definirajmo  $f(t; a) = \frac{1}{t\sqrt{1+a^nt^4}}$ . Za  $a = 0$  je  $f(t; 0) = t^{-1}$ , zato integral divergira. Slutimo, da bo integral v vsakem primeru konvergiral na  $(0, \infty)$ . Pokazali bomo, da integral konvergira lokalno enakomerno. Naj bo  $a \in (\alpha, \infty)$ , kjer je brez škode za splošnost  $0 < \alpha < 1$ . Ker je

$$\alpha^nt^4 \leq a^nt^4 < 1 + a^nt^4, \quad (1)$$

velja

$$f(t; a) = \frac{1}{t\sqrt{1+a^nt^4}} \leq \frac{1}{t \cdot \alpha^{n/2}t^2} = \frac{1}{\alpha^{n/2}} \frac{1}{t^3}.$$

Ker je

$$\int_1^\infty \frac{1}{\alpha^{n/2}} \frac{1}{t^3} dt < \infty$$

začetni integral konvergira enakomerno na  $(\alpha, \infty)$ . Opazimo, da neenakost 1 velja, če je  $n$  sod in je bodisi  $a \in (\alpha, \infty)$  bodisi  $a \in (-\infty, -\alpha)$  ali če je  $n$  lih in je  $a$  pozitiven. Zaradi tega isti račun pokaže, da integral konvergira lokalno enakomerno

- na  $(0, \infty)$  za sode  $n$ ,
- na  $(-\infty, 0)$  za sode  $n$  in
- na  $(0, \infty)$  za lihe  $n$ .

Če je  $a < 0$  in je  $n$  lih, izraz  $\sqrt{1+a^nt^4}$  ni definiran na  $[1, \infty)$  (vsaj ne v realnem smislu), zato so ta območja tudi maksimalna. Torej je konvergenčno območje  $I_n$  enako  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  za sode  $n$  in  $(0, \infty)$  za lihe.

Pokažimo, da je funkcija  $I_n(a)$  odvedljiva. Najprej izračunamo odvod

$$f_a(t; a) = -\frac{na^{n-1}}{2} \frac{t^3}{\sqrt{1+a^nt^4}^3}.$$

Naj bo spet  $a \in (\alpha, \infty)$  za  $0 < \alpha < 1$ . Podobno kot prej lahko sklepamo, da je

$$|f_a(t; a)| \leq \frac{na^n}{2} \frac{t^3}{a^{3n/2}t^6} = \frac{n}{2a^{n/2+1}} \frac{1}{t^3} \leq \frac{n}{2\alpha^{n/2+1}} \frac{1}{t^3}.$$

Integral izraza na desni po  $[1, \infty)$  bo očitno konvergiral. Zato je

$$I'_n(a) = -\frac{na^{n-1}}{2} \int_1^\infty \frac{t^3}{\sqrt{1+a^nt^4}^3} dt$$

Izračunajmo integral na desni. Če vpeljemo novo spremenljivko  $x = 1 + a^nt^4$ , dobimo

$$\int_1^\infty \frac{t^3}{\sqrt{1+a^nt^4}^3} dt = \int_{1+a^n}^\infty \frac{1}{x^{3/2}} \frac{dx}{4a^n} = \frac{1}{2a^n \sqrt{1+a^n}}.$$

Torej je

$$I'_n(a) = -\frac{n}{4a\sqrt{1+a^n}}.$$

## 2. naloga (25 točk)

Dano naj bo telo

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \in [0, \pi], \quad y^2 + z^2 \leq \sin^2 x\}.$$

Izračunaj trojni integral

$$\iiint_T x \, dx \, dy \, dz.$$

**Rešitev:** Vpeljemo 'cilindrične' koordinate

$$x = x \quad y = r \cos \varphi \quad z = r \sin \varphi$$

in dobimo

$$\begin{aligned} I &= \iiint_T x \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} x r \, dr \\ &= 2\pi \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} x r \, dr \\ &= \pi \int_0^\pi x \sin^2(x) \, dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi x(1 - \cos 2x) \, dx \\ &= \frac{\pi^3}{4} - \frac{\pi}{2} \int_0^\pi x \cos 2x \, dx. \end{aligned}$$

Pri zadnjem integralu uporabimo per partes z  $u = x$  in  $v = \frac{1}{2} \sin 2x$  in poračunamo, da je

$$\int_0^\pi x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} x \sin 2x \Big|_0^\pi - \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin 2x \, dx = 0,$$

torej je

$$I = \frac{\pi^3}{4}.$$

### 3. naloga (25 točk)

Naj bo

$$M = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ zvezno odvedljiva, } f(0) = 0, f'(x) > 0\}$$

in preslikava  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  dana s predpisom

$$d(f, g) = \int_0^1 |f'(x) - g'(x)| dx.$$

a) Pokaži, da je  $d$  metrika na množici  $M$ .

b) Dana naj bo preslikava  $\phi : M \rightarrow M$  s predpisom

$$\phi(f)(x) = \int_0^x \left(1 + \frac{t}{2} f'(t)\right) dt.$$

Pokaži, da je  $\phi$  skrčitev in določi negibno točko preslikave  $\phi$ .

#### Rešitev:

Če je  $d(f, g) = 0$ , potem je  $f'(x) = g'(x)$  za vse  $x$  in je  $f(x) = g(x) + C$ , ker pa imata v  $x = 0$  obe funkciji vrednost 0 to pomeni, da je  $C = 0$  in s tem  $f(x) = g(x)$ .

Velja

$$d(\phi(f), \phi(g)) = \int_0^1 \left|1 + \frac{x}{2} f'(x) - 1 - \frac{x}{2} g'(x)\right| dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |f'(x) - g'(x)| dx = \frac{1}{2} d(f, g),$$

torej je skrčitev.

Fiksna točka je

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{2} f'(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\ln(1 - \frac{x}{2})^2}.$$

#### 4. naloga (25 točk)

Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Poišči splošno rešitev sistema

$$\dot{X} = AXB^{-1},$$

kjer je  $X(t)$   $2 \times 2$  matrična funkcija.

**Rešitev:**

Označimo

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Poračunamo, da je

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

in dobimo enačbo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a - c & a + 3b + c + 3d \\ -2c & 2c + 6d \end{bmatrix}$$

oziroma

$$\begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \\ \dot{c} \\ \dot{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da problem razpade na dva dela oblike

$$\begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Lastne vrednosti zgornje matrike so  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = -1$ ,  $\lambda_3 = 3$  in  $\lambda_4 = 6$  z lastnimi vektorji  $\vec{v}_1 = (-4, 1, -4, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (-4, 1, 0, 0)$ ,  $\vec{v}_3 = (0, 1, 0, 0)$  ter  $\vec{v}_4 = (0, 1, 0, 1)$ .

Zato je

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = k_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 e^{-t} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_4 e^{6t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

oziroma

$$X = k_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} + k_2 e^{-t} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + k_3 e^{3t} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + k_4 e^{6t} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$