

Analiza 1: 2. izpit

16. 8. 2022 (PM)

1. naloga (20 točk)

- N** Vsaka zvezna funkcija $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, za katero velja $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$, je liha.
- P** Vsaka kompaktna podmnožica metričnega prostora je omejena.
- P** Funkcija $f(x) = xe^x$ je konveksna na intervalu $[0, \infty)$.
- N** Če velja $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, je zaporedje (a_n) omejeno.
- N** Naj bo $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna. Integral $\int_0^\infty f(x)dx$ je konvergenten natanko tedaj, ko je $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.
- P** Če za odvedljivo funkcijo $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ velja $|f'(x)| < 1$, je omejena.
- N** Za $a \in \mathbb{R}$ je množica $A = \{x^3 < a, x \in \mathbb{R}\}$ Dedekindov rez.
- P** Če zaporedje zveznih funkcij (f_n) enakomerno konvergira k f na $[0, 1]$, potem velja zveza $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$.
- N** Predpis $d(x, y) = |x| + |y|$ podaja metriko na $\mathbb{R}$.
- N** Za $A \subset \mathbb{R}$ velja $\max A = \inf A + 1$. Potem obstaja tudi $\min A$.

Točkovnik:

+2 Vsak pravilen odgovor.

0 Prvi nepravilen odgovor.

-2 Vsak naslednji nepravilen odgovor.

2. naloga (15 točk)

Funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ je podana s predpisom

$$f(x) = \frac{x+i}{x-i}.$$

- a) Dokaži, da njena zaloga leži na enotski krožnici $S = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$.
b) Dokaži, da je $f: \mathbb{R} \rightarrow S$ injektivna. Ali je tudi surjektivna?

Rešitev: Ker sta števec in imenovalec konjugirani kompleksni števili, za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja

$$|f(x)| = \left| \frac{x+i}{x-i} \right| = 1.$$

Nadalje lahko naredimo sklepe

$$\frac{x+i}{x-i} = \frac{y+i}{y-i} \Rightarrow (x+i)(y-i) = (x-i)(y+i) \Rightarrow 2xi = 2yi \Rightarrow x = y.$$

Torej je preslikava injektivna, ni pa surjektivna, saj $f(x) \neq 1$ za noben $x \in \mathbb{R}$.

Točkovnik:

- +5 Zaloga vrednosti.
+5 Dokaz injektivnosti.
+5 Obravnava surjektivnosti.

3. naloga (20 točk)

Krivulja je podana s parametrizacijo

$$x(t) = \frac{t^2}{t-1}, \quad y(t) = \frac{t}{t^2-1}, \quad t \in (1, \infty).$$

- a) S pomočjo odvoda skiciraj grafa koordinatnih funkcij $x(t)$ in $y(t)$ za $t \in (1, \infty)$.
b) Določi linearni asimptoti krivulje za $t \searrow 1$ in $t \rightarrow \infty$ ter krivuljo nariši.

Rešitev: Obe koordinatni funkciji na intervalu $(1, \infty)$ nimata ničel, njun pol pa je pri $t = 1$. Funkcija $x(t)$ ima lokalni minimum pri $t = 2$, kjer zavzame vrednost $x(2) = 4$. Funkcija $y(t)$ na tem intervalu nima stacionarnih točk. Velja tudi

$$\lim_{t \searrow 1} x(t) = \lim_{t \searrow 1} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty \quad \text{in} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

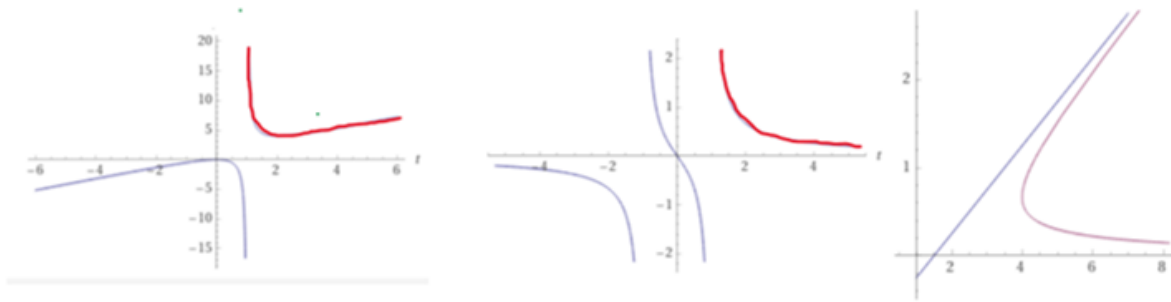
Graf koordinatnih funkcij prikazujeta prvi skici na naslednji strani, del na intervalu $(1, \infty)$ je obarvan rdeče.

Iz zgornjega računa sledi, da se krivulja v primeru, ko gre $t \rightarrow \infty$ približuje premici $y = 0$, torej je to ena izmed linearnih asimptot. Ko gre $t \searrow 1$ za asimptoto oblike $y = kx + n$ velja

$$k = \lim_{t \searrow 1} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{1}{2},$$

$$n = \lim_{t \searrow 1} y(t) - kx(t) = -\frac{3}{4}.$$

Upoštevamo tudi, da je skrajno leva točka krivulje $(x(2), y(2)) = (4, \frac{2}{3})$. Graf krivulje, skupaj z linearno asimptoto, je skiciran na zadnji sliki.



Točkovnik:

+10 Grafa obeh koordinatnih funkcij.

+5 Izračun koeficientov k in n .

+5 Graf krivulje.

4. naloga (20 točk)

Ugotovi, za katera števila $\alpha \in \mathbb{R}$ obstaja integral

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\arctan x^2}{x^\alpha} dx.$$

Izračunaj ga za $\alpha = 2$. Pomoč: $x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$.

Rešitev: Ker je funkcija $\arctan x^2$ omejena, integral v neskončnosti obstaja natanko tedaj, ko je $\alpha > 1$. Nadalje uporabimo L'Hospitalovo pravilo in opazimo, da velja

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{1+x^4}}{2x} = 1.$$

Torej je integral pri $x = 0$ konvergenten natanko tedaj, ko je $\alpha - 2 < 1$. Torej mora biti $\alpha \in (1, 3)$.

Naj bo $\alpha = 2$. Začnemo z integracijo po delih, da dobimo

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x^2}{x^\alpha} dx = \left[-\frac{1}{x} \arctan x^2 \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{2dx}{1+x^4} = \int_0^\infty \frac{2dx}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)}.$$

Nato uporabimo standardni nastavek za izračun preostanka

$$\begin{aligned} I(2) &= \left[\frac{\sqrt{2}}{4} \ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1) - \frac{\sqrt{2}}{4} \ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(\sqrt{2}x + 1) + \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(\sqrt{2}x - 1) \right]_0^\infty \\ &= \left[\frac{\sqrt{2}}{4} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(\sqrt{2}x + 1) + \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(\sqrt{2}x - 1) \right]_0^\infty = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Točkovnik:

+2 Obravnava konvergence za $x = \infty$.

+6 Obravnava konvergence za $x = 0$.

+6 Integracija po delih.

+6 Integral racionalne funkcije.

5. naloga (15 točk)

Naj bo M množica funkcij, ki so zvezno odvedljive na okolici intervala $[0, 1]$. Podan je predpis

$$d(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| + \max_{x \in [0, 1]} |f'(x) - g'(x)|.$$

- a) Utemelji, zakaj zgornja maksimuma obstajata, ter dokaži, da je d metrika na M .
- b) **(PM)** Določi razdaljo med $f(x) = x$ in $g(x) = x^2$.
- b) **(M)** Ali je katero od zaporedij $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$ in $g_n(x) = x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ konvergentno v prostoru (M, d) ? Če je, določi njegovo limito.

Rešitev: Ker sta f in g zvezno odvedljivi na okolici intervala $[0, 1]$, sta funkciji $|f - g|$ in $|f' - g'|$ zvezni na $[0, 1]$. Torej na tem zaprtem intervalu dosežeta svoj maksimum. Nadalje iz pogoja $d(f, g) = 0$ sledi, da je

$$\max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| + \max_{x \in [0, 1]} |f'(x) - g'(x)| = 0 \Rightarrow \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| = 0.$$

To pomeni, da se funkciji f in g ujemata na $[0, 1]$, očitni pa sta tudi zvezi $d(f, f) = 0$ in $d(f, g) = d(g, f)$. Ostane nam še izpeljava trikotniške neenakosti, za katero napravimo oceno

$$\begin{aligned} d(f, h) &= \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - h(x)| + \max_{x \in [0, 1]} |f'(x) - h'(x)| \\ &\leq \max_{x \in [0, 1]} (|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|) + \max_{x \in [0, 1]} (|f'(x) - g'(x)| + |g'(x) - h'(x)|) \\ &\leq \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| + \max_{x \in [0, 1]} |g(x) - h(x)| + \max_{x \in [0, 1]} |f'(x) - g'(x)| + \max_{x \in [0, 1]} |g'(x) - h'(x)| = d(f, g) + d(g, h). \end{aligned}$$

Razdalja med funkcijama $f(x) = x$ in $g(x) = x^2$ je enaka

$$d(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |x - x^2| + \max_{x \in [0, 1]} |1 - 2x|.$$

Prva razlika svoj ekstrem doseže pri $x = \frac{1}{2}$, druga pa v točkah $x = 0$ in $x = 1$. Posledično je razdalja med funkcijama je enaka $d(f, g) = \frac{1}{4} + 1$.

Zaporedje $(f_n)_n$ na intervalu $[0, 1]$ enakomerno konvergira k ničelni funkciji $f(x) = 0$, vendar pa zaporedje njegovih odvodov $f'_n(x) = \sin(nx)$ ne konvergira k $f'(x) = 0$. Zato $(f_n)_n$ ni konvergentno v prostoru (M, d) . Po drugi strani, zaporedje $(g_n)_n$ enakomerno konvergira k funkciji $g(x) = e^x - 1$, zaporedje $(g'_n)_n$ pa k funkciji $g'(x) = e^x$. Zato zaporedje $(g_n)_n$ v metričnem prostoru (M, d) konvergira k funkciji $e^x - 1$.

Točkovnik:

+7 Točka a).

+8 Točka b).

6. naloga (PM, 10 točk)

Naj bo $(a_n)_n$ strogo padajoče zaporedje z lastnostjo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Pokaži, da je s predpisom

$$b_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{n+1} a_n$$

podano Cauchyjevo zaporedje.

Rešitev: Nalogo lahko rešimo direktno, z naslednjim dokazom. Naj bo $\epsilon > 0$ in naj bo $m \geq n$. Potem velja

$$b_m - b_n = (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) \dots \pm a_m,$$

$$b_m - b_n = a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) \dots \pm a_m.$$

Če je n lih, iz prve zveze sklepamo, da je $b_m - b_n \geq 0$, saj je zaporedje (a_n) strogo padajoče, kar pomeni, da je razlika dveh zaporednih členov pozitivna in taka ostane, tudi če na koncu dodamo člen a_m (v primeru, da je tudi m lih). Na enak način iz druge zveze sledi, da je $b_m - b_n < a_{n+1}$. Nasprotno, če je n sod, dobljeni oceni pomnožimo s številom -1 , da dobimo $0 \geq b_n - b_m < -a_n$. Končni sklep je torej, da velja ocena

$$|b_m - b_n| < |a_{n+1}| < \epsilon,$$

če le izberemo dovolj veliko število n (ker gre $a_n \rightarrow 0$).

Alternativna rešitev je možna z uporabo vrst. Predpostavke naloge ustrezajo Leibnitzevemu kriteriju za pogojno konvergenco vrste $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$. To pomeni, da konvergirajo tudi njene delne vsote, ki v tem primeru ustrezajo zaporedju $(b_n)_n$. Ker je v množici realnih števil vsako konvergentno zaporedje tudi Cauchyjevo, je tako tudi naše zaporedje.

7. naloga (M, 10 točk)

Naj bo $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ enakomerno zvezna funkcija.

- Dokaži: če je $(a_n)_n$ Cauchyjevo zaporedje racionalnih števil, potem je tudi $(f(a_n))_n$ Cauchyjevo zaporedje.
- Dokaži, da ima f zvezno razširitev na $\mathbb{R}$. To pomeni, da obstaja zvezna funkcija $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katero je $\tilde{f}(x) = f(x)$, za vse $x \in \mathbb{Q}$.

Rešitev: Naj bo $\epsilon > 0$. Iz enakomerne zveznosti sledi, da obstaja $\delta > 0$, za katerega velja

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Izberimo $n_0 \in \mathbb{N}$, da bo za $n, m \geq n_0$ veljalo $|a_n - a_m| < \delta$. Potem je $|f(a_n) - f(a_m)| < \epsilon$, kar porodi Cauchyjev pogoj za zaporedje $(f(a_n))_n$.

Naj bo $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ poljubno iracionalno število ter $(a_n)_n$ zaporedje racionalnih števil, ki konvergira k njemu. Potem je tudi zaporedje $(f(a_n))_n$ Cauchyjevo oz. konvergentno. Torej lahko definiramo

$$\tilde{f}(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n).$$

Preverimo, da je definicija ustezna. Naj bo $(b_n)_n$ neko drugo racionalno zaporedje, ki konvergira k a . Ker je f enakomerno zvezna, za poljuben $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za dovolj pozne indekse $n \geq n_0$ velja $|a_n - b_n| < \delta$ in $|f(a_n) - f(b_n)| < \epsilon$. Od tod sledi, da se v limiti dobimo isto vrednost

$$\tilde{f}(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n).$$

Preverimo še zveznost za $\tilde{f}$ v točki $a \in \mathbb{R}$. Naj bo $(a_n)_n$ poljubno zaporedje z lastnostjo $a_n \rightarrow a$. Aproksimiramo ga z racionalnim zaporedjem $(\tilde{a}_n)_n$ z lastnostjo $|a_n - \tilde{a}_n| < 10^{-n}$. Tudi za to zaporedje velja $\tilde{a}_n \rightarrow a$. Po definiciji preslikave $\tilde{f}$ sledi, da je

$$\tilde{f}(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{a}_n).$$

Vendar pa znova za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za dovolj pozne indekse $n \geq n_0$ velja $|a_n - \tilde{a}_n| < \delta$ in $|f(a_n) - f(\tilde{a}_n)| < \epsilon$. Torej velja tudi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{a}_n) = \tilde{f}(a).$$