

Izbrana Poglavja iz Matematike, Drugi izpit

17. junij 2022

Čas pisanja je 105 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

1. naloga (25 točk)

Dana sta polinoma $p, q \in \mathbb{R}[x]$,

$$p = x^6 + 4x^4 - x^2 - 4 \quad \text{in} \quad q = x^3 - 3x^2 + x - 3.$$

- a) (15 točk) Poišči razcep polinomov p in q na nerazcepne faktorje v $\mathbb{R}[x]$.
- b) (10 točk) Določi $\gcd(p, q) \in \mathbb{R}[x]$.

2. naloga (25 točk)

- a) (15 točk) Poišči vse homomorfizme kolobarjev $\phi : \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x]$.
- b) (10 točk) Poišči vse izomorfizme kolobarjev $\phi : \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x]$.

3. naloga (25 točk)

Dani sta podmnožici ravnine

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\} \quad \text{in} \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y - \sin x| < 1\}.$$

- a) (10 točk) Dokaži, da velja $A \approx B$.
- b) (10 točk) Določi ∂A in ∂B .
- c) (5 točk) Ali velja $\partial A \approx \partial B$?

4. naloga (25 točk)

Na množico naravnih števil $\mathbb{N}$ vpeljemo topologijo

$$\mathcal{T} = \{\mathbb{N} \cap [a, \infty) \mid a \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}.$$

- a) (5 točk) Pokaži, da je $\mathcal{T}$ topologija na $\mathbb{N}$.
- b) (10 točk) Ali je prostor $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ kompakten?
- c) (10 točk) Ali je prostor $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ povezan s potmi?