

Izbrana Poglavja iz Matematike, Tretji izpit

19. avgust 2022

Čas pisanja je 105 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

1. naloga (25 točk)

Dan je polinom

$$p = x^4 + 2x^2 + 4.$$

a) (10 točk) Poišči razcep polinoma p na nerazcepne faktorje v $\mathbb{R}[x]$.

b) (15 točk) Poišči razcep polinoma p na nerazcepne faktorje v $\mathbb{Q}[x]$.

2. naloga (25 točk)

a) (15 točk) Dan je pravi ideal $I \triangleleft \mathbb{Z}[i]$ (tj. $0 \neq I \neq \mathbb{Z}[i]$). Pokaži, da je $K = \mathbb{Z}[i]/I$ kolobar s končno mnogo elementi.

b) (10 točk) Kateremu znanemu kolobarju je izomorfen kolobar $\mathbb{Z}[i]/(1+i)$?

3. naloga (25 točk)

a) (15 točk) Z uporabo kvaternionov izračunaj matriko rotacije za $\frac{2\pi}{3}$ okrog osi $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

b) (10 točk) Ugotovi, kam omenjena rotacija preslika vektor $\vec{v} = (1, 2, 3)$.

4. naloga (25 točk)

Množico vseh parov realnih števil

$$X = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid |A| = 2\}$$

opremimo z metriko

$$d(A, B) = |\min A - \min B| + |\max A - \max B|.$$

Pozor: $A = \{x, y\}$ in $A = \{y, x\}$ predstavljata **isti** (neurejeni) par realnih števil.

a) (10 točk) Dokaži, da je d res metrika.

b) (15 točk) Ali je prostor X povezan s potmi? Odgovor utemelji z dokazom.