

ANA2 IŠRM, 3.izpit

24. avgust 2022

10⁰⁰ – 12⁰⁰ Predavalnice: VFP

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1
2
3
4
Σ

1. naloga (30 točk)**a)** Izračunaj nedoločeni integral

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx.$$

b) Izračunaj volumen vrtenine, ki ga dobimo, ko graf funkcije

$$f : [\frac{5}{4}, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{x-1}$$

zavrtimo okoli premice $x = 1$.**Rešitev:**Naredimo per-partes ($u = \arcsin x$, $dv = x^{-2} dx$) in dobimo

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx = -\frac{\arcsin x}{x} + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \dots$$

Uvedemo še $t = \frac{1}{x}$, kar nam da $dx = -\frac{dt}{t^2}$ in dobimo

$$\begin{aligned} \dots &= -\frac{\arcsin x}{x} - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = -\frac{\arcsin x}{x} - \ln|t - \sqrt{t^2-1}| = \\ &= -\frac{\arcsin x}{x} - \ln\left|\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right| + C. \end{aligned}$$

Iz enačbe $y = \frac{x}{x-1}$ dobimo $x = \frac{y}{y-1}$ ($y \in [2, 5]$) in dobimo volumen

$$V = \pi \int_2^5 \left(\frac{y}{y-1} - 1\right)^2 dy = \frac{3\pi}{4}.$$

2. naloga (20 točk)

Ugotovi, za katere $a > 0$ konvergira vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n+3)}{a^n n!}.$$

Rešitev:

Po kvocientnem kriteriju imamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n+3)(4n+7)}{a^{n+1} (n+1)!}}{\frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n+3)}{a^n n!}} = \frac{4}{a} < 1$$

torej za $a > 4$ vrsta gotovo konvergira, za $a \in (0, 4)$ divergira, za $a = 4$ pa dobimo vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n+3)}{4^n n!},$$

kjer uporabimo Raabejev kriterij in dobimo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{4n+4}{4n+7} - 1 \right) = -\frac{3}{4},$$

torej vrsta divergira.

Vrsta konvergira natanko tedaj, ko je

$$a > 4.$$

3. naloga (25 točk)

Dano naj bo funkcijsko zaporedje

$$f_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right).$$

- a) Določi funkcijo $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, h kateri zaporedje $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira po točkah.
b) Ali zaporedje $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira enakomerno na intervalu $[1, \infty)$ k funkciji f ?
c) Ali zaporedje $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira enakomerno na intervalu $(0, 1]$ k funkciji f ?

Rešitev:

Velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Velja

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right) - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right| = \frac{\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x})}$$

Velja

$$\sup_{x \in [1, \infty)} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\frac{1}{n}}{2(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

torej zaporedje konvergira enakomerno na $[1, \infty)$.

Naj bo n poljubno (veliko, od sedaj naprej fiksno) naravno število. Velja

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x})} = \infty,$$

torej se razlika $|f_n(x) - f(x)|$ na intervalu $(0, 1]$ ne manjša z naraščajočim n in zaporedje torej ne konvergira enakomerno na $(0, 1]$.

4. naloga (25 točk)

Poišči funkcijo $y : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ z lastnostjo, da je $y(1) = 1$ in da tangenta skozi vsako točko $(x, y(x))$, seka graf funkcije $f(x) = x^3$ v točki $(3x, (3x)^3)$.

Rešitev:

Vstavimo $X = 3x$ in $Y = 27x^3$ v enačbo tangentne premice in dobimo

$$2xy' + y = 27x^3 \Rightarrow$$

$y_h = Cx^{-\frac{1}{2}}$. Za partikularno imamo nastavek $y_p = C(x)x^{-\frac{1}{2}}$ in dobimo pogoj

$$C' = \frac{27}{2}x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow y_p = \frac{27}{7}x^3$$

torej je splošna rešitev oblike

$$y = \frac{C}{\sqrt{x}} + \frac{27}{7}x^3.$$

Upoštevamo $y(1) = 1$ in dobimo $C = -\frac{20}{7}$ in končni rezultat je

$$y = -\frac{20}{7\sqrt{x}} + \frac{27}{7}x^3.$$