

Analiza 1: 3. izpit

30. 8. 2022

1. naloga (20 točk)

- N** Množica vseh realnih zaporedij je števna.
- P** Preslikava F , ki metrični prostor (M, d) slika vase in za vsak par točk $x, y \in M$ izpolnjuje pogoj $d(F(x), F(y)) \leq d(x, y)^2$, je zvezna na M .
- N** Če je $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ injektivna in $g: \mathbb{R} \rightarrow D$ surjektivna, potem je $f \circ g$ bijektivna.
- P** Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-2)^n$ konvergentna za $x = 4$, je konvergentna tudi za $x = 1$.
- N** Vsaka omejena funkcija $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ je integrabilna.
- P** Če je $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$, obstaja $x > 2022$, da je $f(x) < -2022$.
- P** Vsako omejeno realno zaporedje ima konvergentno podzaporedje.
- N** Obstaja $\alpha > 0$, za katerega je integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^\alpha}$ konvergenten.
- P** Naj bo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva in strogo naraščajoča funkcija. Potem je funkcija $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ konveksna na intervalu $(0, 1)$.
- P** Vsota vseh rešitev enačbe $z^6 = 1$ je enaka nič.

Točkovnik: 2 točki za vsak pravilen odgovor, 0 točki za prvi nepravilen odgovor, -2 točki za vse naslednje nepravilne odgovore.

2. naloga (15 točk)

Zaporedje (a_n) je podano z rekurzivno zvezo

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2a_n - 3}{a_n + 1}.$$

a) Naj bo $a_0 = 1$. Poišči stekališča zaporedja (a_n) .

b) Naj bo $a_0 = 4$. Dokaži, da je zaporedje (a_n) monotono. Ali je konvergentno?

Rešitev: Za $a_0 = 1$ velja $a_1 = 0, a_2 = -3, a_3 = 0, a_4 = -3, \dots$. Torej sta stekališči 0 in 3. Nadalje imamo

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2 + 2a_n - 3}{a_n + 1} - a_n = \frac{a_n - 3}{a_n + 1},$$

od koder sklepamo, da je $a_{n+1} > a_n$ za $a_n > 3$ in je zaporedje monotono in neomejeno, če je $a_0 = 4$. Torej tudi ni konvergentno! Slednje lahko argumentiramo tudi z dejstvom, da mora limita tega rekurzivnega zaporedja zadoščati zvezi

$$a = \frac{a^2 + 2a - 3}{a + 1} \implies a = 3.$$

Točkovnik: 5 točk za stekališči, 5 točk za dokaz monotonosti in 5 točk za utemeljitev divergence.

3. naloga (20 točk)

Podana je funkcija

$$f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}.$$

- a) Dokaži, da je f soda in s pomočjo odvoda skiciraj njen graf.
- b) Izračunaj volumen vrtenine, ki nastane pri vrtenju grafa funkcije f okoli osi x .

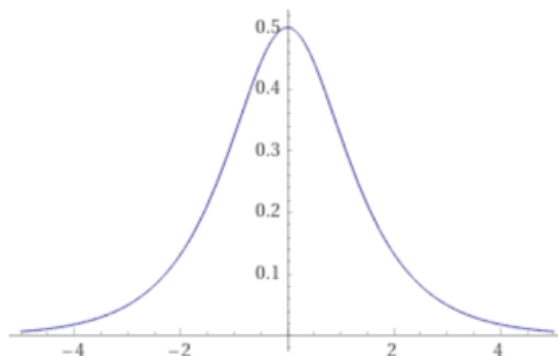
Rešitev: Najprej dokažemo, da velja

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{e^{-2x} + 1} \cdot \frac{e^{2x}}{e^{2x}} = \frac{e^x}{1 + e^{2x}} = f(x).$$

Ker je f soda, zadošča, da njeno obnašanje analiziramo le na intervalu $[0, \infty)$. Opazimo, da se pri $x \rightarrow \infty$ približuje ničelni vrednosti in da je

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{3x}}{(e^{2x} + 1)^2}.$$

Funkcija ima torej edino stacionarno točko v $(0, \frac{1}{2})$, sicer pa monotonno pada na $[0, \infty)$.



Velja

$$V = \pi \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} dx.$$

V ta integral uvedemo spremenljivko $t = e^{2x}$ in dobimo.

$$V = \pi \int_1^{\infty} \frac{dt}{(t+1)^2} = \pi \left[-\frac{1}{t+1} \right]_1^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Točkovnik: 4 točke za dokaz sodosti, 8 točk za graf funkcije f in 8 točk za izračun volumna.

4. naloga (15 točk)

Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{x}{n}}.$$

Določi njeno definicijsko območje in dokaži, da je f na njem zvezna. Ali je tudi zvezno odvedljiva?

Rešitev: Za $x \geq 0$ očitno velja

$$\frac{1}{n^2} e^{-\frac{x}{n}} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Po Weierstrassovem kriteriju je dana vrsta enakomerno konvergentna, funkcija f pa zvezna na intervalu $[0, \infty)$. Ker za $x < 0$ podobne ocene nimamo, se omejimo na $x \in [-a, 0]$ za $a > 0$:

$$\frac{1}{n^2} e^{-\frac{x}{n}} \leq \frac{1}{n^2} e^{\frac{a}{n}} \leq \frac{e^a}{n^2}.$$

Torej je vrsta enakomerno konvergentna tudi na vsakem takem intervalu. Posledično je f definirana in zvezna vzdolž cele realne osi. Ker je njen odvod podan z

$$f'(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{-\frac{x}{n}},$$

enaki sklepi veljajo tudi zanj. Funkcija je torej tudi zvezno odvedljiva na celem $\mathbb{R}$.

Opomba: Možna je tudi preverba konvergence z Raabejevim kriterijem, a je z limito

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{(n+1)^2}{n^2} e^{-\frac{x}{n} + \frac{x}{n+1}} - 1 \right) = 2 > 1$$

kar nekaj dela, poleg tega pa nam ta kriterij ne pove ničesar o zveznosti funkcije f .

Točkovnik: 10 točke za obravnavo konvergence in zveznosti, 5 točk za obravnavo odvoda.

5. naloga (10 točk)

Naj bo funkcija f analitična na okolici točke $a \in \mathbb{R}$, njen razvoj pa naj bo za nek $a_1 \neq 0$ enak

$$f(x) = 1 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots$$

- a) Dokaži, da obstaja $\delta > 0$, da je funkcija f injektivna na intervalu $(a - \delta, a + \delta)$.
- b) Naj bo f^{-1} inverz zožitve funkcije f na interval $(a - \delta, a + \delta)$ iz točke a . Poišči Taylorjev polinom drugega reda za f^{-1} v točki 1.

Rešitev: Ker je f analitična na okolici točke a , je tam tudi zvezno odvedljiva, za njen odvod pa velja $f'(a) = a_1 \neq 0$. Torej obstaja $\delta > 0$, da je $f'(x) \neq 0$ za $x \in (a - \delta, a + \delta)$. Na tem intervalu je f strogo monotona in posledično injektivna.

Ker je $f(a) = 1$, velja $f^{-1}(1) = a$. Iz predavanj poznamo zvezo

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Če vanjo vstavimo točko a oziroma $f(a) = 1$, dobimo:

$$(f^{-1})'(1) = (f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{a_1}.$$

Sedaj zgornjo zvezo iz predavanj še enkrat odvajajmo. Dobimo

$$(f^{-1})''(f(x)) \cdot f'(x) = -\frac{f''(x)}{f'(x)^2} \Rightarrow (f^{-1})''(f(x)) = -\frac{f''(x)}{f'(x)^3}.$$

Ker je $f''(a) = a_2$, od tod sledi

$$(f^{-1})''(1) = (f^{-1})''(f(a)) = -\frac{f''(a)}{f'(a)^3} = -\frac{a_2}{a_1^3}.$$

Iskani polinom je torej enak

$$P_{1,2}(x) = a + \frac{1}{a_1}(x - 1) - \frac{a_2}{2a_1^3}(x - 1)^2.$$

Točkovnik: 3 točke za injektivnost, 3 točke za izračun prvega odvoda funkcije f^{-1} , 4 točke za izračun drugega odvoda odvoda funkcije f^{-1} .

6. naloga (20 točk)

Na $\mathbb{R}^2$ vpeljemo metriko $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |x_1 - x_2|; & y_1 = y_2, \\ |x_1 - x_2| + 1; & y_1 \neq y_2. \end{cases}$$

- a) Dokaži, da je d res metrika.
- b) Skiciraj odprti krogi $K((0, 0), 2)$ in $K((0, 0), \frac{1}{2})$.
- c) **(PM)** Podana je množica $A = [0, 1] \times [0, 1]$. Ugotovi, ali sta $(\frac{1}{2}, 0)$ in $(0, \frac{1}{2})$ notranji točki te množice. Ali je A odprta?
- c) **(M)** Določi notranjost množice $A = [0, 1] \times [0, 1]$.
- d) **(M)** Ugotovi, ali je množica $B = \{(x, \operatorname{tg}(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$ omejena.

Rešitev: Simetričnost predpisa d je očitna, kot je tudi očitno, da je razdalja med dvema enakima točkama ničelna. Za dokaz pozitivne definitnosti torej manjka le še sklep

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 0 \Rightarrow y_1 = y_2 \wedge |x_1 - x_2| = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2,$$

pri čemer smo upoštevali, da pri pogoju $y_1 \neq y_2$ razdalja ne more biti ničelna. Sedaj si oglejmo še trikotniško neenakost. Če velja $y_1 = y_3$, imamo

$$d((x_1, y_1), (x_3, y_3)) = |x_1 - x_3| \leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| \leq d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + d((x_2, y_2), (x_3, y_3)).$$

Če velja $y_1 \neq y_3$, imamo

$$d((x_1, y_1), (x_3, y_3)) = |x_1 - x_3| + 1 \leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + 1 \leq d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + d((x_2, y_2), (x_3, y_3)).$$

Pri tem smo upoštevali, da je lahko število y_2 enako kateremu izmed števil y_1 in y_3 ali pa ne.

Iskani krogi sta enaki

$$K((0, 0), 2) = \{(x, y) \mid (y = 0 \wedge |x| < 2) \vee |x| < 1\} = (-2, 2) \times \{0\} \cup (-1, 1) \times \mathbb{R},$$

$$K\left((0, 0), \frac{1}{2}\right) = \left\{(x, y) \mid y = 0 \wedge |x| < \frac{1}{2}\right\} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \{0\}.$$

Na tem mestu velja opaziti, da smo s tem določili tudi 'tipični odprti krogi' tega prostora. Natančneje, če je radij $r \leq 1$, je odprta s središčem v točki (x, y) enaka odprti vodoravni daljici $(x - r, x + r) \times \{y\}$. Če pa je $r > 1$, dobimo unijo te iste daljice in pasu $(x - r + 1, x + r - 1) \times \mathbb{R}$.

Sedaj lahko naredimo vse preostale sklepe. Točka $(\frac{1}{2}, 0)$ je notranja, saj je kroglja s središčem v njej in radijem $r = \frac{1}{2}$ v celoti vsebovana v A . Nasprotno, točka $(0, \frac{1}{2})$ ni notranja, saj vsaka kroglja okoli nje seka tudi komplement točke A . S podobnim razmislekom ugotovimo, da so vse točke, ki ležijo na navpičnih stranicah kvadrata A , robne, vse ostale točke pa so notranje. Torej je notranjost množice A enaka množici $(0, 1) \times [0, 1]$. Nazadnje ugotovimo tudi, da je $B \subset K((0, 0), 1 + \frac{\pi}{2})$. Torej gre za omejeno množico.

Točkovnik za PM: 2 točki za pozitivno definitnost, 4 točke za trikotniško neenakost, 4 točke za obe odprti krogi, po 4 točke za obravnavo obeh točk v c), 2 točki za odgovor na vprašanje.

Točkovnik za M: 2 točki za pozitivno definitnost, 2 točke za trikotniško neenakost, 4 točke za obe odprti krogi, 6 točk za b), 6 točk za c).