

--	--	--	--	--

1 2 3 4 Σ

--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Ime in priimek

Naloga 1 [25 točk]

Naj bo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

S pomočjo LU razcepa brez pivotiranja določite vse vrednosti x , za katere je $\det A = 0$.

Rešitev. Najprej izvedemo LU razcep brez pivotiranja

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & x \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & -5 & -10 & -15 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & -5 & -10 & x - 20 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & -5 & -10 & -15 \\ 1 & 1/5 & -3 & -3 \\ 5 & 1 & 0 & x - 5 \end{pmatrix}.$$

Od tod sledi $\det A = 15(x - 5)$. Da bo determinanta enaka 0, mora biti $x = 5$.

Naloga 2 [25 točk]

Naj bo $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log x + x^2$.

- a) Dokažite, da ima f natanko eno pozitivno ničlo.
- b) Ničlo iz a) izračunajte s tangentno metodo z začetnim približkom $x_0 = 1$ na štiri decimalna mesta natančno.
- c) Kolikšen je red konvergence metode iz b) k ničli iz a)?

Rešitev.

- a) Ker je $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = -\infty$ in $f(1) = 1$, ima f vsaj eno pozitivno ničlo. Toda $f'(x) = 1/x + 2x > 0$ na $(0, \infty)$, zato je f naraščajoča in ima lahko samo eno ničlo.
- b) Tangentna (Newtonova) metoda se glasi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\log x_n + x_n^2}{1/x_n + 2x_n}, \quad x_0 = 1.$$

Dobimo $x_1 = 0.6667$, $x_2 = 0.6529$, $x_3 = 0.6529$.

- c) Naj bo α ničla f . Ker je $f'(x) > 0$ za vsak $x \in (0, \infty)$, je seveda tudi $f'(\alpha) > 0$. Torej je α enostavna ničla in red konvergence tangentne metode je vsaj 2. Ničla bo reda vsaj 3, če je $f''(\alpha) = 0$. Toda $f''(x) = -1/x^2 + 2 = 0$ ima edino pozitivno rešitev $x^* = \sqrt{2}/2$. Hitro preverimo, da je $x^* \neq \alpha$, zato red ne more biti 3.

Naloga 3 [25 točk]

Dana sta vektorja $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Določite realno število α tako, da bo vektor $\alpha\mathbf{a}$ najboljša aproksimacija vektorja $\mathbf{b}$ po metodi najmanjših kvadratov. Kakšna je relacija med vektorjema $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$, če je rešitev $\alpha = 0$?

Rešitev. Iščemo torej

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}^1} \|\mathbf{a}\alpha - \mathbf{b}\|_2.$$

V standardnih oznakah pri metodi najmanjših kvadratov imamo torej $A = \mathbf{a}$, $\mathbf{x} = [\alpha]$ in $\mathbf{b} = \mathbf{b}$. Ker je $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, je A polnega ranga in rešitev lahko dobimo preko normalnega sistema $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$. V našem primeru torej

$$\mathbf{a}^T \mathbf{a} \alpha = \mathbf{a}^T \mathbf{b}.$$

Sledi $\alpha = \mathbf{a}^T \mathbf{b} / \|\mathbf{a}\|_2^2$.

Če je $\alpha = 0$ mora biti $\mathbf{a}^T \mathbf{b} = 0$, torej morata biti $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ pravokotna.

Naloga 4 [25 točk]

Naj bo p_d kubični interpolacijski polinom, za katerega je $p_d(0) = 0$, $p'_d(0) = d$, $p_d(2) = 1$ in $p'_d(2) = -1$.

- Določite p_1 v Newtonovi obliki.
- Kakšen mora biti d , da bo $p_d(1) = 0$?

Rešitev. Rešimo najprej točko a) za poljuben d . Tabela deljenih diferenc je

	$[\cdot]$	$[\cdot, \cdot]$	$[\cdot, \cdot, \cdot]$	$[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot]$
0	0			
		d		
0	d		$(1 - 2d)/4$	
		$1/2$		$(d - 2)/4$
2	1		$-3/4$	
		-1		
2	-1			

Polinom p_d v Newtonovi obliki je

$$p_d(x) = dx + \frac{1 - 2d}{4}x^2 + \frac{d - 2}{4}x^2(x - 2). \quad (1)$$

Za $d = 1$ dobimo $p_1(x) = x - x^2/4 - x^2(x - 2)/4$.

Rešitev točke b) sedaj preprosto sledi (1). Dobimo namreč $p_d(1) = (d + 3)/4$. Torej mora biti $d = -3$.