

Izbrana poglavja iz matematike

Topologija

(1) Ugotovi, ali so dani intervali homeomorfni:

- (a) $(0, 1)$ in (a, ∞) ,
- (b) $[0, 1]$ in $(0, 1)$,
- (c) $[0, 1]$ in $(0, 1)$.

Rešitev: Naj bosta $A \subset \mathbb{R}^n$ in $B \subset \mathbb{R}^m$ podmnožici evklidskih prostorov. *Homeomorfizem* med A in B je bijekcija $f : A \rightarrow B$, za katero sta f in f^{-1} zvezni preslikavi.

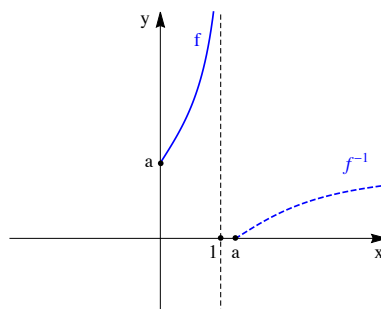
(a) Iščemo homeomorfizem med intervalom $(0, 1)$ in polneskončnim intervalom (a, ∞) . Vzamemo lahko na primer funkcijo s predpisom

$$f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right) + a,$$

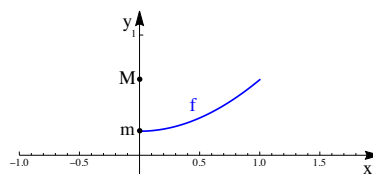
ki ima inverz

$$f^{-1}(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(x - a).$$

Poglejmo še skico.



(b) Tokrat bomo uporabili izrek iz analize, ki pravi, da doseže vsaka zvezna funkcija $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ na intervalu $[0, 1]$ svoj minimum m in maksimum M . Torej je slika $f([0, 1]) = [m, M]$ zaprt interval, kar pa pomeni, da zvezna funkcija $f : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ ne more biti surjektivna.

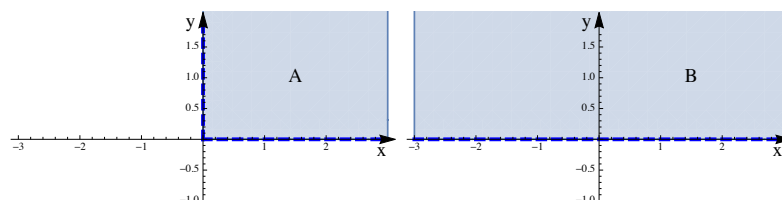


(c) Sedaj bomo pokazali še, da intervala $[0, 1]$ in $(0, 1)$ nista homeomorfna. Pa denimo, da je $f : [0, 1) \rightarrow (0, 1)$ zvezna bijekcija. Iz analize vemo, da je vsaka takšna funkcija monotona. Če je torej f naraščajoča, v njeni sliki ne morejo biti števila z intervala $(0, f(0))$, če pa je f padajoča, pa v sliki ni števil z intervala $(f(0), 1)$. V vsakem primeru pridemo v protislovje. $\square$

(2) Konstruiraj homeomorfizme med danimi množicami:

- (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ in $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$,
- (b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ in $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$,
- (c) $A = S^2 \setminus \{N\}$ in $B = \mathbb{R}^2$.

Rešitev: (a) Najprej bomo konstruirali homeomorfizem med odprtim prvim kvadrantom v $\mathbb{R}^2$ in odprto zgornjo polravnino v $\mathbb{R}^2$.



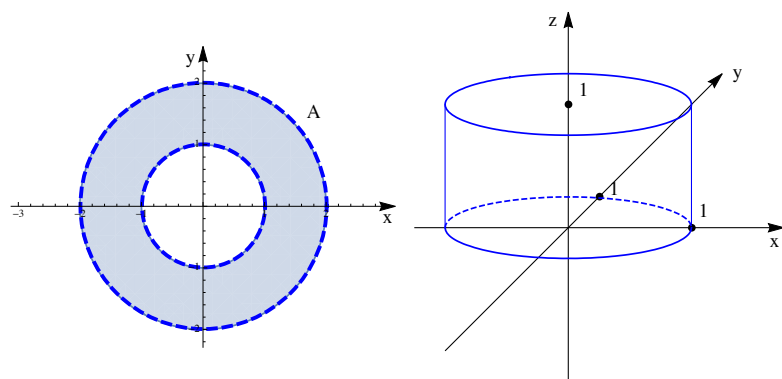
Konstruirali ga bomo tako, da višine točk ne spreminjamo, v x -smeri pa bomo uporabili homeomorfizem $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Tako dobimo homeomorfizem $\Phi : A \rightarrow B$ s predpisom

$$\Phi(x, y) = (\ln x, y),$$

njegov inverz pa je preslikava $\Phi^{-1} : B \rightarrow A$ s predpisom

$$\Phi^{-1}(x, y) = (e^x, y).$$

(b) Množica A je sedaj zaprt kolobar v $\mathbb{R}^2$ z notranjim polmerom $r = 1$ in zunanjim polmerom $R = 2$, množica B pa je plašč valja s polmerom osnovne ploskve $r = 1$ in višino $h = 1$ v $\mathbb{R}^3$.



Preslikavo $\Phi : A \rightarrow B$ bomo definirali tako, da bomo kolobar dvignili do plašča valja. Ekspliciten predpis je

$$\Phi(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \right),$$

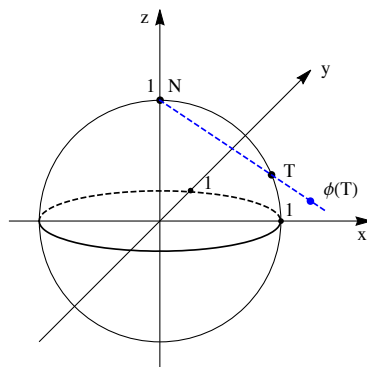
inverz te preslikave pa ima predpis

$$\Phi^{-1}(x, y, z) = ((z + 1)x, (z + 1)y).$$

(c) Množica

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

je enotska sfera v $\mathbb{R}^3$, množica A pa enotska sfera brez severnega pola $N = (0, 0, 1)$. V nadaljevanju bomo opisali stereografsko projekcijo, ki komplement severnega pola v S^2 homeomorfno preslika na evklidsko ravnino.



Stereografska projekcija

$$\Phi : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

preslika točko $T \in S^2 \setminus \{N\}$ v presek poltraka NT z ravnino $z = 0$ v $\mathbb{R}^3$. Če enačimo to ravnino z $\mathbb{R}^2$ na naraven način, lahko izračunamo, da ima preslikava Φ eksplíciten predpis

$$\Phi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right).$$

Južni pol preslika preslikava Φ v točko $(0, 0)$, ekvatorialno krožnico pa pusti pri miru. Točke iz južne poloble se preslikajo v notranjost enotske krožnice, točke iz severne poloble pa v zunanost.

Inverz $\Phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$ ima predpis

$$\Phi^{-1}(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right).$$

Tudi tokrat sta Φ in Φ^{-1} zvezni preslikavi, kar pomeni, da je Φ homeomorfizem. □

(3) Ugotovi, ali je A odprta oziroma zaprta podmnožica danega evklidskega prostora:

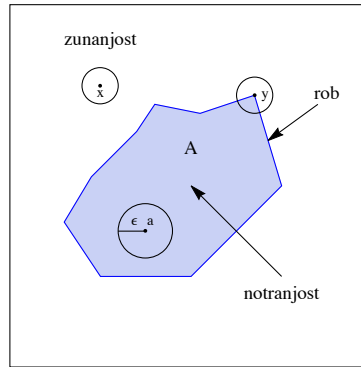
- (a) $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$,
- (b) $A = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$,
- (c) $A = \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$,
- (d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < |y|\} \subset \mathbb{R}^2$.

Rešitev: Naj bo A podmnožica evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$. Elemente $\mathbb{R}^n$ lahko potem glede na množico A razdelimo na tri disjunktne podmnožice

$$\mathbb{R}^n = \{\text{notranje točke } A\} \cup \{\text{zunanje točke } A\} \cup \{\text{robne točke } A\}.$$

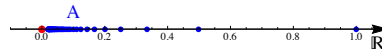
- Točka $a \in A$ je notranja točka množice A , če obstaja $\epsilon > 0$, da je $K(a, \epsilon) \subset A$.
- Točka $x \in A^c$ je zunanja točka množice A , če je notranja točka komplementa A^c .
- Točka $y \in \mathbb{R}^n$ je robna točka množice A , če vsaka kroglja $K(y, \epsilon)$ seka tako A kot A^c .

Notranje točke so vedno vsebovane v A , zunanje točke so vedno v A^c , robne točke pa so lahko bodisi v A ali pa v A^c .

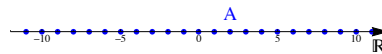


Množica A je *odprta* v M , če so vse njene točke notranje, in *zaprta*, če vsebuje vse svoje robne točke. Pri dokazovanju lahko pogosto uporabimo tudi ekvivalentno karakterizacijo, ki pravi, da je množica A zaprta natanko takrat, ko je množica A^c odprta.

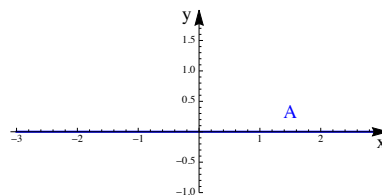
(a) Množica $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ ni niti odprta niti zaprta. Vse njene točke so robne točke, vendar pa je robna točka tudi točka 0, ki pa ne leži v A .



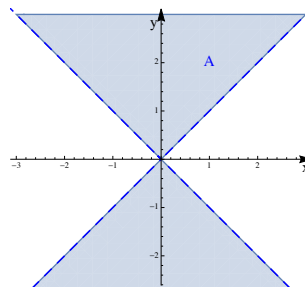
(b) Množica $A = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ ni odprta, je pa zaprta, saj je njen komplement odprt. Vse njene točke so robne točke, notranjih točk pa nima.



(c) Množica $A = \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ predstavlja abscisno os v ravnini. Ni odprta, saj vsaka kroglja s središčem na abscisni osi vsebuje točke izven abscisne osi. Je pa zaprta, saj je njen komplement odprt.



(d) Množica $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < |y|\} \subset \mathbb{R}^2$ je unija dveh območij, ki ju omejujeta premici $y = x$ in $y = -x$. Je odprta, ni pa zaprta.



□

(4) Množico vseh linearnih funkcij $L = \{kx + n \mid k, n \in \mathbb{R}\}$ opremimo z metriko

$$d(p, q) = \max_{x \in [0, 1]} |p(x) - q(x)|.$$

(a) Naj bo bijekcija $F : L \rightarrow \mathbb{R}^2$ podana s predpisom $F(kx + n) = (k, n)$. Skiciraj množico $F(K(0, 1))$.

(b) Ugotovi, ali je

$$A = \{p \in L \mid p(1) = 0\}$$

odprt oziroma zaprt podprostor P .

Rešitev: Metrika na množici M je preslikava $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, ki zadošča pogojem:

(1) Pozitivna definitnost: $d(x, y) \geq 0$ za vsaka $x, y \in M$ in $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

(2) Simetričnost: $d(x, y) = d(y, x)$ za vsaka $x, y \in M$.

(3) Trikotniška neenakost: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ za vsako trojico $x, y, z \in M$.

Odprta krogla s središčem v točki a in s polmerom r je podmnožica M , ki je definirana s predpisom

$$K(a, r) = \{x \in M \mid d(a, x) < r\}.$$

V našem primeru lahko metriko

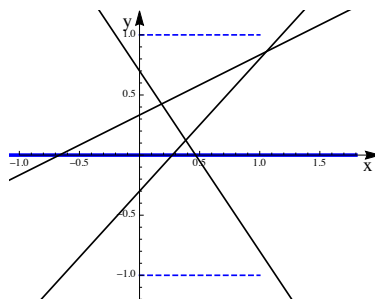
$$d(p, q) = \max_{x \in [0, 1]} |p(x) - q(x)|.$$

interpretiramo kot razdaljo med grafoma linearnih funkcij p in q na intervalu $[0, 1]$.

(a) V krogli $K(0, 1)$ so vse linearne funkcije p , ki zadoščajo pogoju

$$d(0, p) = \max_{x \in [0, 1]} |p(x)| < 1.$$

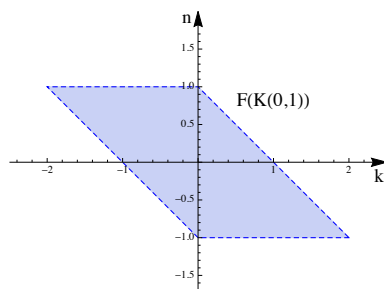
Ker je vsaka linearna funkcija monotona, so to natanko funkcije, za katere velja $|p(0)| < 1$ in $|p(1)| < 1$.



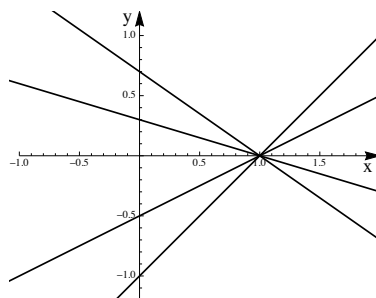
Pogosto si stvari lažje predstavljamo, če abstraktno množico parametriziramo s kakšno podmnožico evklidskega prostora. V našem primeru sta ustrezna parametra naklon k in začetna vrednost n . V prostoru parametrov lahko kroglo $K(0, 1)$ opišemo z množico rešitev sistema neenačb:

$$\begin{aligned} |n| &< 1, \\ |k + n| &< 1. \end{aligned}$$

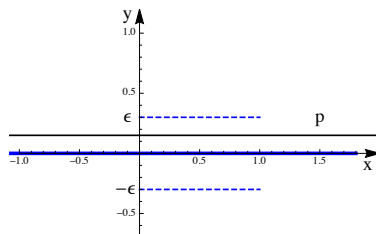
Tako dobimo lik na spodnji sliki.



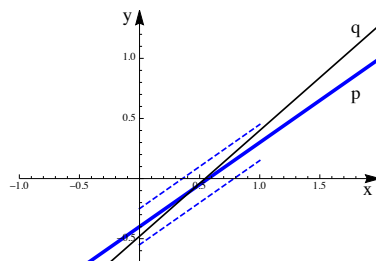
(b) Podmnožica A je množica vseh linearnih funkcij, ki imajo ničlo v točki $x = 1$. Pokazali bomo, da ni odprta, je pa zaprta.



Najprej vzemimo funkcijo $0 \in A$ in poljuben $\epsilon > 0$. V kroglu $K(0, \epsilon)$ je potem funkcija $p(x) = \frac{\epsilon}{2}$, ki pa ni v A . To pomeni, da nobena krogla s središčem v 0 ne leži cela v A , kar pa pomeni, da A ni odprta.



Sedaj bomo pokazali, da je A zaprta podmnožica v L . V ta namen vzemimo poljubno premico $p \in A^c$. Po definiciji to pomeni, da je $p(1) \neq 0$. Če definiramo $\epsilon = \frac{|p(1)|}{2}$, lahko preverimo, da potem cela krogla $K(p, \epsilon)$ leži v A^c , kar pa pomeni, da je A^c odprta množica, množica A pa je posledično zaprta.



□

(5) Projekтивna ravnina $\mathbb{R}P^2$ je definirana kot množica vseh premic v $\mathbb{R}^3$ skozi izhodišče.

(a) Konstruiraj topologijo na $\mathbb{R}P^2$.

(b) Ali je preslikava $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}P^2$, ki $t \in \mathbb{R}$ priredi premico s smerjo $\vec{s}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, zvezna?

Rešitev: Naj bo X poljubna množica. Topologija na množici X je družina $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ podmnožic množice X , ki zadošča pogojem:

(1) Poljubna unija množic iz τ je spet množica iz τ .

(2) Končni presek množic iz τ je spet množica iz τ .

(3) $X \in \tau$ in $\emptyset \in \tau$.

Elemente τ interpretiramo kot odprte podmnožice X . Zgornji pogoji nam potem povedo, da so poljubne unije in končni preseki odprtih množic spet odprte množice. Na ta dejstva smo že navajeni v evklidskih prostorih, tokrat pa smo jih privzeli kot aksiome topologije.

(a) Za dano podmnožico $A \subset \mathbb{R}P^2$ definirajmo:

$$P_A = \bigcup_{p \in A} p \subset \mathbb{R}^3,$$

$$S_A = P_A \cap S^2 \subset S^2.$$

Elementi množice A so premice skozi izhodišče v $\mathbb{R}^3$. Unijo vseh teh premic v $\mathbb{R}^3$ označimo s P_A , presek P_A z enotsko sfero S^2 pa z S_A . Na množico $\mathbb{R}P^2$ lahko potem uvedemo topologijo τ s predpisom

$$A \text{ je odprta v } \mathbb{R}P^2 \Leftrightarrow S_A \text{ je odprta v } S^2.$$

Preverimo sedaj, da množica τ zadošča aksiomom za topologijo.

(1) Naj bo $\{A_i\}_{i \in I}$ poljubna družina množic v τ in označimo $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Pokazati moramo, da je potem tudi $A \in \tau$. Po definiciji je

$$S_A = P_A \cap S^2 = P_{\bigcup_{i \in I} A_i} \cap S^2 = \left(\bigcup_{i \in I} P_{A_i} \right) \cap S^2 = \bigcup_{i \in I} (P_{A_i} \cap S^2) = \bigcup_{i \in I} S_{A_i}.$$

Po predpostavki so vse množice S_{A_i} odprte v S^2 , zato je odprta tudi njihova unija S_A .

(2) Naj bo sedaj $A = \bigcap_{i=1}^n A_i$, kjer so $A_1, A_2, \dots, A_n \in \tau$. Potem je

$$S_A = P_A \cap S^2 = P_{\bigcap_{i=1}^n A_i} \cap S^2 = \left(\bigcap_{i=1}^n P_{A_i} \right) \cap S^2 = \bigcap_{i=1}^n (P_{A_i} \cap S^2) = \bigcap_{i=1}^n S_{A_i}.$$

Ker so množice $S_{A_1}, \dots, S_{A_n}$ odprte v S^2 , je odprt tudi njihov presek.

(3) Ker je $S_\emptyset = \emptyset$ in $S_{\mathbb{R}P^2} = S^2$, sta $\emptyset, \mathbb{R}P^2 \in \tau$.

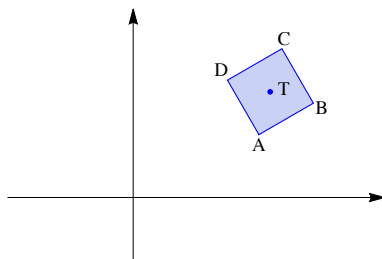
(b) Preslikava $f : (M, \tau_M) \rightarrow (N, \tau_N)$ med topološkima prostoroma je zvezna v točki $x \in M$, če lahko za vsako odprto okolico V točke $f(x)$ najdemo odprto okolico U točke x , da velja $f(U) \subset V$. Zveznost preslikave je odvisna od izbire topologije na domeni in kodomeni.

V našem primeru imamo preslikavo, ki opisuje vrtenje premice okoli navpične osi. Zdi se nam, da bi morala biti zvezna, formalno pa to pokažemo na naslednji način.

Izberimo poljuben $t \in \mathbb{R}$ in poljubno odprto okolico V premice $F(t)$. Po definiciji je potem S_V odprta podmnožica sfere S^2 . Če našo preslikavo F interpretiramo kot preslikavo $\overline{F} : \mathbb{R} \rightarrow S^2$ s predpisom $\overline{F}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, je to preslikava, ki ima zvezne komponente in je zato zvezna. Zato lahko najdemo nek interval $U = (t - \epsilon, t + \epsilon)$, da bo veljalo $\overline{F}(U) \subset S_V$. Vendar pa mora potem veljati tudi $F(U) \subset V$, kar smo želeli pokazati. $\square$

(6) Konstruiraj topologijo na množici vseh položajev orientiranega kvadrata v $\mathbb{R}^2$.

Rešitev: Označimo z M množico vseh položajev orientiranega kvadrata $ABCD$ v $\mathbb{R}^2$. Množica M ni podmnožica kakšnega evklidskega prostora, zato moramo nanjo uvesti primerno topologijo. Intuitivno bi radi, da bosta dva položaja kvadrata blizu, če bosta imela podobno orientacijo in če bosta njuni težišči blizu skupaj. Topologijo, ki se ujema z našo intuicijo, bomo definirali z ustrezno parametrizacijo množice M .



Privzeli bomo, da ima kvadrat $ABCD$ dolžino stranice $a = 1$. Označimo:

$T = (x, y)$...koordinate težišča kvadrata $ABCD$

$\vec{s} = \overrightarrow{AB}$...orientacija kvadrata $ABCD$

Ker ima kvadrat enotsko stranico, je $\vec{s}$ enotski vektor oblike

$$\vec{s} = (\cos \phi, \sin \phi)$$

za nek $\phi \in \mathbb{R}$. Sedaj lahko definiramo preslikavo $F : M \rightarrow \mathbb{R}^4$ s predpisom

$$F(ABCD) = (x, y, \cos \phi, \sin \phi).$$

Slika $F(M)$ je podmnožica $\mathbb{R}^2 \times S^1 \subset \mathbb{R}^4$, kjer smo z

$$S^1 = \{(\cos \phi, \sin \phi) \in \mathbb{R}^2 \mid \phi \in \mathbb{R}\}$$

označili množico enotskih vektorjev v ravnini. Množico M lahko sedaj parametriziramo z inverzom preslikave F , ki ga označimo s

$$p : \mathbb{R}^2 \times S^1 \rightarrow M.$$

Preslikava p je bijekcija, zato nam omogoča, da topologijo na množici $\mathbb{R}^2 \times S^1$ prenesemo na množico M . Definiramo namreč, da je množica $U \subset M$ odprta natanko takrat, ko je množica $p^{-1}(U)$ odprta v $S^1 \times \mathbb{R}^2$. $\square$

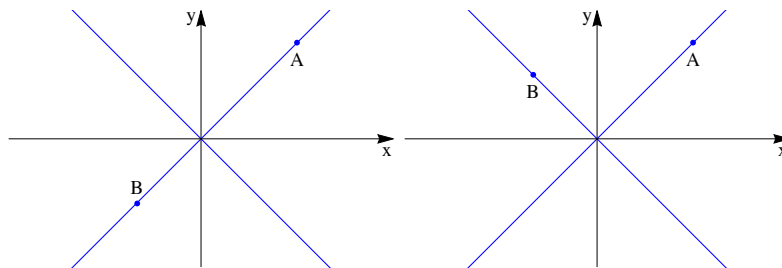
(7) Pokaži, da sta dana topološka prostora povezana s potmi:

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| = |x|\},$

(b) $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$

Rešitev: Topološki prostor X je *povezan s potmi*, če za poljubni točki $A, B \in X$ obstaja *pot* med njima. To pomeni, da obstaja zvezna preslikava $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$, za katero je $\gamma(0) = A$ in $\gamma(1) = B$.

(a) Najprej bomo pokazali, da je unija simetral obeh kvadrantov v $\mathbb{R}^2$ povezana s potmi. Ločili bomo dva primera.



Če sta A in B na isti premici, lahko za pot vzamemo kar daljico med njima, ki ima predpis

$$\gamma(t) = (1-t)A + tB.$$

V primeru, ko sta A in B na različnih premicah, pa bomo pot med njima konstruirali kot unijo daljice od A do 0 in od 0 do B . Tako dobimo predpis

$$\gamma(t) = \begin{cases} (1-2t)A & ; t \in [0, \frac{1}{2}], \\ (2t-1)B & ; t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

(b) Sedaj bomo pokazali, da je dvodimenzionalna sfera povezana s potmi. Recimo najprej, da točki $A, B \in S^2$ nista antipodni (to pomeni, da $A \neq -B$). Potem je preslikava $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^2$ s predpisom

$$\gamma(t) = \frac{(1-t)A + tB}{|(1-t)A + tB|}$$

zvezna pot med točkama A in B . Če bi bili točki A in B antipodni, bi pot v števcu zgornje formule potekala skozi središče koordinatnega sistema, zato bi v formuli delili z nič. Zgornje formule torej v tem primeru ne moremo uporabiti neposredno. Lahko pa v primeru, ko je $A = -B$, izberemo točko $C \in S^2$, ki je različna od A in B ter konstruiramo z uporabo zgornje formule poti med A in C ter C in B . Če ti dve poti združimo, dobimo pot med A in B . $\square$

(8) Pokaži, da je grupa $SO(3)$ povezana s potmi.

Rešitev: Množica

$$SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid R^T R = I, \det(R) = 1\}$$

je grupa rotacij evklidskega prostora $\mathbb{R}^3$. Vsaka rotacija $R \in SO(3)$ je rotacija okoli neke osi v $\mathbb{R}^3$ za nek kot ϕ . Faktoriziramo jo lahko v obliki $R = PR_\phi P^{-1}$, kjer je P prehodna matrika in

$$R_\phi = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Denimo sedaj, da sta $R_1, R_2 \in SO(3)$ poljubni rotaciji. Potem lahko faktoriziramo rotacijo R_1 v obliki $R_1 = P_1 R_{\phi_1} P_1^{-1}$ in definiramo zvezno pot $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow SO(3)$ s predpisom

$$\gamma_1(t) = P_1 R_{(1-t)\phi_1} P_1^{-1}.$$

To je pot, ki se začne v $\gamma_1(0) = R_1$ in konča v $\gamma_1(1) = I$. Podobno lahko definiramo pot $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \text{SO}(3)$ od I do R_2 s predpisom

$$\gamma_2(t) = P_2 R_{t\phi_2} P_2^{-1}.$$

Če združimo ti dve poti, dobimo pot med R_1 in R_2 . □

- (9) (a) Pokaži, da prostora $\mathbb{R}^2$ in $(0, 1)^2$ nista kompaktna.
 (b) Pokaži, da je S^1 kompakten prostor.

Rešitev: Topološki prostor X je *kompakten*, če za poljubno pokritje prostora X z odprtimi množicami obstaja končno podpokritje.

(a) Pokažimo najprej, da evklidska ravnina $\mathbb{R}^2$ ni kompaktna. Preverimo lahko, da pokritje ravnine

$$\mathcal{U} = \{\mathbb{R} \times (k, k+2) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

z odprtimi vodoravnimi pasovi nima končnega podpokritja. Za odprt kvadrat pa lahko na primer konstruiramo pokritje

$$\mathcal{U} = \{(\frac{1}{n}, 1) \times (0, 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

z odprtimi pravokotniki, ki nima končnega podpokritja.

(b) V praksi je za preverjanje kompaktnosti podmnožic evklidskih prostorov bolj priročno uporabiti Heine-Borelov izrek, ki pravi, da je podmnožica $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktna natanko takrat, ko je zaprta in omejena.

Enotska krožnica S^1 je zaprta in omejena, torej je kompaktna. Direktno po definiciji bi bilo kompaktnost težje pokazati. □

- (10) (a) Konstruiraj zvezno bijekcijo $f : [0, 1] \rightarrow S^1$.
 (b) Pokaži, da ne obstaja zvezna bijekcija $g : S^1 \rightarrow [0, 1]$.

Rešitev: (a) Za preslikavo f lahko vzamemo na primer preslikavo s predpisom

$$f(x) = e^{2\pi i x}.$$

Ta preslikava preslika $0 \in [0, 1]$ v $1 \in S^1$, notranjost intervala $(0, 1)$ pa v pozitivni smeri navije okoli enotske krožnice.

(b) Da pokažemo, da ne obstaja zvezna bijekcija $g : S^1 \rightarrow [0, 1]$, pa bomo uporabili dejstvo, da je S^1 kompakten topološki prostor. Po izreku s predavanj je potem tudi slika $g(S^1) \subset [0, 1]$ kompaktna množica. Ker interval $[0, 1]$ ni kompakten, torej preslikava g ne more biti surjektivna. □