

# Afina in projektivna geometrija

## Aksiomatsko definirana afina ravnina

(1) Ugotovi, ali naslednji par zadošča aksiomom aksiomatsko definirane afine ravnine:

$$\mathcal{A} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2,$$

$$\mathcal{A}_1 = \{p \cap \mathcal{A} \mid p \text{ je premica v } \mathbb{R}^2 \text{ z enačbo } ax + by + c = 0, \text{ kjer so } a, b, c \in \mathbb{Z}\} \setminus \{\emptyset\}.$$

*Rešitev:* Denimo, da imamo par množic  $\{\mathcal{A}, \mathcal{A}_1\}$ , kjer je  $\mathcal{A}_1 \subset 2^{\mathcal{A}}$ . Elemente v  $\mathcal{A}$  bomo interpretirali kot točke, elemente v  $\mathcal{A}_1$  pa kot premice. Par  $\{\mathcal{A}, \mathcal{A}_1\}$  sestavlja *aksiomatsko definirano afino ravnino*, če zadošča aksiomom:

A1 Skozi različni točki poteka natanko ena premica.

A2 Za vsako točko  $T \in \mathcal{A}$  in vsako premico  $p \in \mathcal{A}_1$  obstaja natanko ena premica, ki gre skozi  $T$  in je vzporedna  $p$ .

A3 Obstajajo tri nekolinearne točke.

Študirali bomo celoštevilsko mrežo  $\mathcal{A}$  v evklidski ravnini  $\mathbb{R}^2$ . Premice v  $\mathcal{A}_1$  ustrezajo premicam v  $\mathbb{R}^2$  s celoštevilskimi smernimi vektorji.

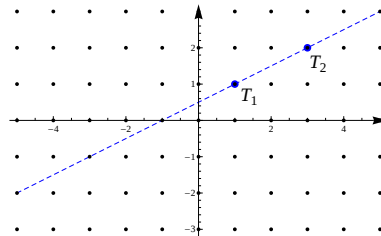
Najprej bomo pokazali, da par  $\{\mathcal{A}, \mathcal{A}_1\}$  ustreza aksiomu A1. V ta namen izberimo poljubni točki  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathcal{A}$ . Če je  $x_1 = x_2 = m$ , je

$$p : x - m = 0$$

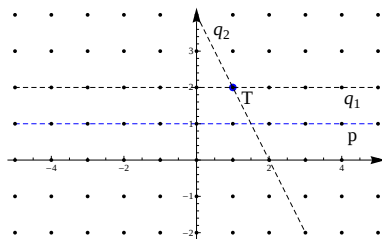
edina premica, ki poteka skozi točki  $(x_1, y_1)$  in  $(x_2, y_2)$ . Naj bo sedaj  $x_1 \neq x_2$ . Pokazali bomo, da lahko evklidsko premico, ki poteka skozi dani točki, zapišemo v predpisani obliki. Računajmo:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1), \\ (y - y_1)(x_2 - x_1) &= (y_2 - y_1)(x - x_1), \\ 0 &= (y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + (x_2y_1 - x_1y_2). \end{aligned}$$

Ker so  $x_1, x_2, y_1$  in  $y_2$  cela števila, so tudi  $a = y_2 - y_1$ ,  $b = x_1 - x_2$  in  $x_2y_1 - x_1y_2$  cela števila, kar smo želeli pokazati.



Pokažimo sedaj, da aksiom A2 ni izpolnjen v tem modelu. Izberimo na primer premico  $p : y - 1 = 0$  in točko  $(1, 2)$ . Premici  $q_1 : y - 2 = 0$  in  $q_2 : 2x + y - 4 = 0$  potem obe vsebujeta točko  $(1, 2)$ , a ne sekata premice  $p$ .

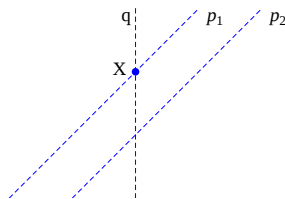


Brez težav lahko opazimo tudi, da je aksiom A3 v našem primeru izpolnjen.  $\square$

(2) Dokaži, da v vsaki aksiomatsko definirani afini ravnini veljajo naslednje trditve:

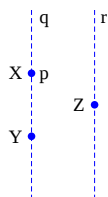
- (a) za poljubni vzporedni premici  $p_1$  in  $p_2$  ter poljubno od njih različno premico  $q$  velja, da  $q$  seka  $p_1$  natanko takrat, ko  $q$  seka  $p_2$ ,
- (b) na vsaki premici ležita vsaj dve točki,
- (c) vse premice imajo enako število točk.

*Rešitev:* (a) Denimo, da premica  $q$  seka premico  $p_1$  v točki  $X$ . Če  $q$  ne bi sekala premice  $p_2$ , bi skozi točko  $X$  potekali premici  $q$  in  $p_1$ , ki bi bili obe vzporedni premici  $p_2$ . To pa je v protislovju z aksiomom A2.



Od tod sledi, da je vzporednost premic ekvivalenčna relacija na množici premic.

(b) Sedaj bomo pokazali, da na vsaki premici ležita vsaj dve točki. Recimo, da obstaja premica  $p$ , ki vsebuje samo točko  $X$ . Po aksiomu A3 obstajata še vsaj dve točki  $Y$  in  $Z$ , da so  $X, Y$  in  $Z$  nekolinearne. Označimo s  $q$  premico skozi  $X$  in  $Y$ , ki obstaja po aksiomu A1. Po aksiomu A2 lahko sedaj najdemo vzporednico  $r$  premice  $q$ , ki gre skozi  $Z$ . Ta premica  $r$  ne vsebuje točke  $X$ , zato je vzporedna tudi premici  $p$ . To pa pomeni, da skozi  $X$  potekata dve vzporednici  $p$  in  $q$  premice  $r$ , kar pa je v protislovju z aksiomom A2.



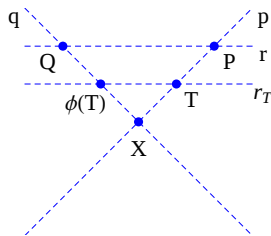
(c) V afini ravnini  $\mathbb{F}_p^2$  leži na vsaki premici  $p$  točk. V nadaljevanju bomo pokazali, da imajo v poljubni aksiomatsko definirani afini ravnini vse premice enako število točk.

Za začetek bomo obravnavali primer, ko se premici  $p$  in  $q$  sekata v točki  $X$ . Ker vsebuje vsaka premica vsaj dve točki, lahko najdemo točki  $P \in p$  in  $Q \in q$ , različni od  $X$ . Označimo z  $r$  premico, ki poteka skozi točki  $P$  in  $Q$ . Za vsako točko  $T \in p$  potem po aksiomu A2 obstaja natanko ena vzporednica premice  $r$  skozi  $T$ , ki jo označimo z  $r_T$ . Po

točki (a) mora premica  $r_T$  sekati tudi premico  $q$  v točki, ki jo označimo s  $\phi(T)$ . Na ta način dobimo preslikavo

$$\phi : p \rightarrow q.$$

Po aksiomu A2 skozi vsako točko na  $q$  poteka natanko določena vzporednica premice  $r$ , od koder sledi, da je  $\phi$  bijekcija.



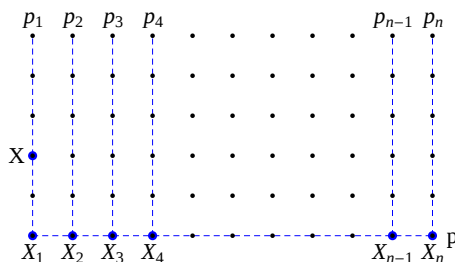
Če se  $p$  in  $q$  ne sekata, lahko najdemo premico  $r$ , ki seka tako  $p$  kot  $q$ . Potem imata  $p$  in  $q$  enako točk kot  $r$ .  $\square$

(3) Naj bo  $\mathcal{A}$  aksiomatsko definirana afina ravnina reda  $n$ . Dokaži:

- (a) afina ravnina  $\mathcal{A}$  vsebuje  $n^2$  točk,
- (b) skozi vsako točko  $X \in \mathcal{A}$  poteka  $n + 1$  premic,
- (c) afina ravnina  $\mathcal{A}$  vsebuje  $n^2 + n$  premic.

*Rešitev:* Aksiomatsko definirana ravnina  $\mathcal{A}$  je reda  $n$ , če na vsaki premici leži  $n$  točk.

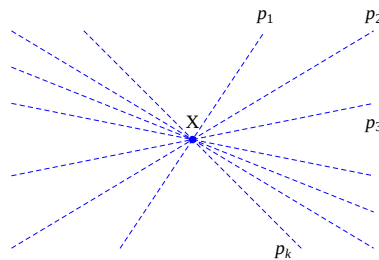
(a) Najprej pokažimo, da aksiomatsko definirana afina ravnina  $\mathcal{A}$  reda  $n$  vsebuje  $n^2$  točk. Izberimo poljubno premico  $p$  v  $\mathcal{A}$  in označimo točke na njej z  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Po aksiomu A3 obstaja točka  $X \in \mathcal{A}$ , ki ne leži na  $p$ . Nadalje lahko po aksiomu A1 najdemo enolično določeno premico  $p_1$ , ki poteka skozi točki  $X$  in  $X_1$ . Ker  $X \notin p$ , se premici  $p$  in  $p_1$  sekata samo v točki  $X_1$ . Z uporabo aksioma A2 lahko sedaj najdemo vzporednice  $p_2, p_3, \dots, p_n$  premice  $p$ , ki potekajo skozi točke  $X_2, X_3, \dots, X_n$ .



V ravnini  $\mathcal{A}$  imamo torej  $n$  vzporednic, od katerih vsaka vsebuje po  $n$  točk. Zato ravnina  $\mathcal{A}$  vsebuje vsaj  $n^2$  točk. Pokazati moramo še, da drugih točk ni. Pa denimo, da obstaja točka  $Y \in \mathcal{A}$ , ki ne leži na nobeni izmed premic  $p_i$ . Po aksiomu A2 lahko najdemo premico  $q$ , ki vsebuje  $Y$  in je vzporedna premici  $p_1$ . Tako dobljena premica  $q$  bi potem morala sekati premico  $p$  in bi zato sovpadala z eno izmed premic  $p_i$ . To pa je v nasprotju s predpostavko.

(b) Dokažimo sedaj, da skozi vsako točko poteka  $n + 1$  premic.

Izberimo poljubno točko  $X \in \mathcal{A}$  in označimo s  $p_1, p_2, \dots, p_k$  premice, ki potekajo skozi točko  $X$ . Poljubni dve izmed teh premic se sekata natanko v točki  $x$ , njihova unija pa je cela ravnina  $\mathcal{A}$ . Oboje sledi iz aksioma A1.



Imamo torej  $k$  premic, ki vsebujejo po  $n$  točk. Če seštejemo te točke in upoštevamo, da smo točko  $X$  šteli  $k$ -krat, dobimo enačbo:

$$\begin{aligned} kn - (k - 1) &= n^2, \\ k(n - 1) &= n^2 - 1, \\ k &= n + 1. \end{aligned}$$

Torej skozi točko  $X$  poteka  $n + 1$  premic.

(c) Pokazali smo že, da v ravnini  $\mathcal{A}$  leži  $n^2$  točk in da gre skozi vsako točko  $n + 1$  premic. Ker leži na vsaki premici  $n$  točk, je vseh premic

$$\frac{n^2(n + 1)}{n} = n^2 + n.$$

Opomba: Enako idejo kot pri dokazu (a) dela lahko uporabimo za konstrukcijo koordinat na afini ravnini  $\mathcal{A}$ . Najprej si izberimo poljubni različni premici  $p$  in  $q$  ter na njih označimo točke  $P_1, P_2, \dots, P_n$  in  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ . Predpostavimo še, da se premici  $p$  in  $q$  sekata v točki  $P_1 = Q_1$ . Nato označimo s  $p_j$  vzporednico  $p$  skozi  $Q_j$  ter s  $q_i$  vzporednico  $q$  skozi  $P_i$ . Sedaj lahko definiramo bijekcijo  $\tau : \{1, 2, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathcal{A}$  s predpisom

$$\tau(i, j) = q_i \cap p_j.$$

V splošnem na množici  $\{1, 2, \dots, n\}$  ne moremo definirati strukture obsega, za katero bi bila preslikava  $\tau$  afina transformacija. To je mogoče narediti natanko takrat, ko afina ravnina  $\mathcal{A}$  zadošča še dodatnima Desarguesovima aksiomoma.  $\square$

- (4) Konstruiraj  $n - 1$  paroma ortogonalnih latinskih kvadratov reda  $n$ , kjer je  $n$  praštevilo.

*Rešitev:* *Latinski kvadrat* reda  $n$  je  $n \times n$  matrika s koeficienti  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ , katere vsaka vrstica in vsak stolpec vsebuje same različne elemente. Latinska kvadrata sta *ortogonalna*, če ob njunem spoju dobimo vse možne urejene pare.

Poglejmo si pojem ortogonalnosti na primeru dveh latinskih kvadratov reda 3.

|   |   |   |
|---|---|---|
| A | B | C |
| C | A | B |
| B | C | A |

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 1 |
| 3 | 1 | 2 |

Če ta dva kvadrata zložimo skupaj, dobimo naslednjo matriko urejenih parov.

|       |       |       |
|-------|-------|-------|
| (A,1) | (B,2) | (C,3) |
| (C,2) | (A,3) | (B,1) |
| (B,3) | (C,1) | (A,2) |

Dva latinska kvadrata sta potem ortogonalna natanko takrat, ko v tej matriki parov vsak urejeni par nastopa natanko enkrat.

Pri konstrukciji ortogonalnih latinskih kvadratov reda  $n$ , kjer je  $n$  praštevilo, si bomo pomagali s končno afino ravnino  $\mathbb{F}_n^2$ . V tej afini ravnini imamo natanko  $n + 1$  linearnih premic. Ena izmed teh je vodoravna, ena navpična, ostale pa so poševne. Pokazali bomo, da lahko vsaki poševni premici pridružimo nek latinski kvadrat tako, da bodo različne premice določale paroma ortogonalne latinske kvadrate.

Izberimo si torej neko poševno linearno premico  $\mathcal{A}_1$ . Ta premica določa družino vzporednic

$$\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n\},$$

ki so paroma disjunktne, njihova unija pa je cela ravnina  $\mathbb{F}_n^2$ . Na vsaki premici je natanko  $n$  točk. Označimo sedaj mesta v kvadratu, ki ustrezajo točkam na premici  $\mathcal{A}_i$ , z  $i$ . Premica  $\mathcal{A}_i$  seka vsako vodoravnico in vsako navpičnico natanko enkrat, zato bo število  $i$  nastopalo v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu natanko enkrat. To pa pomeni, da smo s tem postopkom konstruirali latinski kvadrat.

Denimo sedaj, da je  $\mathcal{B}_1 \neq \mathcal{A}_1$  neka druga poševna linearna premica ter  $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_n\}$  njej pridružena družina vzporednic. Označimo z  $A$  in  $B$  prirejena latinska kvadrata. Za poljuben par  $(i, j)$  se premici  $\mathcal{A}_i$  in  $\mathcal{B}_j$  sekata v natanko eni točki. Torej matrika parov, ki jo dobimo z združitvijo latinskih kvadratov  $A$  in  $B$ , vsebuje vsak par  $(i, j)$  natanko enkrat, kar pa pomeni, da sta  $A$  in  $B$  ortogonalna.  $\square$