

KOMPLEKSNA ANALIZA, 2007-8

PREDAVATELJ: FRANC FORSTNERIČ

Predmet je nadaljevanje in poglobitev študija kompleksne analize v eni spremenljivki. Potrebno je predznanje v obsegu predmeta Analiza 2.

Okvirna vsebina:

1. Pregled in ponovitev osnovnih lastnosti holomorfnih funkcij: Holomorfne funkcije in Cauchy-Riemannove enačbe. Operatorja ∂ in $\bar{\partial}$. Harmonične funkcije. Cauchyeva-Greenova integralna formula. Lastnosti Cauchyjeve transformacije. Izrek Morera. Schwarzov princip zrcaljenja. Cauchy-Goursatov izrek. Cauchyeva integralna reprezentacija holomornih funkcij in njenih odvodov. Razvoj v potenčno vrsto. Princip identičnosti. Cauchyjeve ocene. Izrek o odprti preslikavi. Principa maksimuma. Schwarzova lema. Meromorfne funkcije. Izrek o ostankih. Princip argumenta. Rouchéjev izrek. Hurwitzov izrek.

2. Konvergenca v prostoru holomorfnih funkcij: Topologija enakomerne konvergenca na kompaktnih. Frechéto v prostor $\mathcal{O}(D)$. Normalne družine. Montelov izrek. Konvergenca produktov.

3. Holomorfne preslikave: Jacobijeva determinanta holomorfne preslikave. Lokalna oblika holomorfnih preslikav. Konformne preslikave. Riemannova sfera in Moebiusove transformacije. Holomorfní avtomorfizmi diska in polravnine. Riemannov upodobitveni izrek. Robno obnašanje holomorfnih preslikav in Caratheodoryjev izrek.

4. Aproksimacijski izreki: Rungejev izrek o aproksimaciji z racionalnimi funkcijami. Rešitev nehomogene $\bar{\partial}$ -enačbe na ravninskih območjih. Mittag-Lefflerjev izrek. Weierstrassov faktorizacijski izrek. Izrek o interpolaciji s holomorfno funkcijo na diskretni množici. Mergelyanov aproksimacijski izrek.

5. Zaloga vrednosti holomorfne funkcije: Izrek o ploščini. Izreki Landaua, Koebeja in Blocha. Picardovi izreki.

6. Riemannove ploskve: Analitično nadaljevanje in monodromijski izrek. Snop zarodkov holomorfnih funkcij. Riemannove ploskve: osnovne konstrukcije in primeri. Holomorfne preslikave med Riemannovimi ploskvami. Kompleksno projektivni prostori in algebráične krivulje.

7. Harmonične funkcije. Poissonovo jedro in rešitev Dirichletovega problema na krogu. Lastnosti Poissonovega integrala in povezava s Cauchyjevim integralom. Harnackov izrek. Subharmonične funkcije.

Literatura:

- (1) L. Ahlfors: Complex Analysis, Third ed. McGraw-Hill, New York, 1978.
- (2) C. A. Berenstein, R. Gay: Complex Analysis and Special Topics in Harmonic Analysis. Springer-Verlag, New York, 1995.
- (3) J. Conway: Functions of One Complex Variable, Second. ed. Graduate Texts in Mathematics, 11. Springer-Verlag, New York, 1978.
- (4) T. W. Gamelin: Complex Analysis. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2001
- (5) R. Narasimhan, Y. Nievergelt: Complex Analysis in One Variable, Second ed. Birkhauser, Boston, 2001.
- (6) W. Rudin, Real and Complex Analysis, Third ed. McGraw-Hill, New York, 1987.

Opomba: Po en izvod vsake od knjig (1)–(4) bo v letu 2007/8 na stalni rezervi v Matematični knjižnici.

Izpit:

Izpit sestoji iz pisnega in ustnega izpita. Pisni izpit je mogoče opraviti s 4 kolokviji, pri čemer mora biti vsota nad 50% in vsaj trije od kolokvijev nad 40% možnih točk. Pozitivna ocena iz pisnega izpita je pogoj za pristop k ustnemu izpitu. Pisni in ustni izpit morata biti opravljena na istem razpisanem izpitnem roku.

JADRANSKA 424, TEL. (01) 4766556

E-mail address: franc.forstneric@fmf.uni-lj.si

KOMPLEKSNA ANALIZA

Franc Forstnerič

(Rane Portnerie)

I. OSNOVNE LASTNOSTI HOLOMORFNIH FUNKCIJ

I.1. Holomorfne funkcije in Cauchy-Riemannove enačbe.

$$z = x + iy \in \mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}.$$

 $D \subset \mathbb{C}$ domena (odprta množica).Naj bo $f = u + iv : D \rightarrow \mathbb{C}$ diferenciable.

$$h = \xi + i\eta \in \mathbb{C} \text{ (majhen).}$$

$$f(z+h) = f(z) + \underbrace{f_x(z) \cdot \xi + f_y(z) \cdot \eta}_{d f(z) \cdot h} + o(h); \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0.$$

 $d f(z) \cdot h = \text{diferencial } f$ Uporabimo $\xi = \frac{h+\bar{h}}{2}$, $\eta = \frac{h-\bar{h}}{2i}$ in dobimo:

$$\begin{aligned} f(z+h) &= f(z) + \frac{1}{2}(f_x(z) - i f_y(z))h + \frac{1}{2}(f_x(z) + i f_y(z))\bar{h} + o(h) \\ &= f(z) + f_z(z) \cdot h + f_{\bar{z}}(z) \bar{h} + o(h), \end{aligned}$$

kjer smo označili

$$f_z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right); \quad f_{\bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

operatorja: $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ odvisnaja na z (ne $\bar{z}$).

Dobljeno formulo

$$f(z+h) = f(z) + \underbrace{f_z(z) \cdot h + f_{\bar{z}}(z) \bar{h}}_{df(z) \cdot h} + o(h) \quad (1.1)$$

uporabimo

s funkcijama

$$f(z) = z : dz \cdot h = h$$

$$f(z) = \bar{z} : d\bar{z} \cdot h = \bar{h}.$$

Torej lahko diferencial df pišemo v obliki

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \cdot d\bar{z} \\ &= \partial f + \bar{\partial} f \end{aligned}$$

∂f = $\mathbb{C}$ -linearni del diferenciala df

$\bar{\partial} f$ = $\mathbb{C}$ -antilinearni del df .

Opomba: $dz = dx + i dy$; $d\bar{z} = dx - i dy$.

1.1. Definicija. Šteto

$$f'(z) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

(če obstaja) se imenuje kompleksni odvod f v točki z .

Funkcija f je holomorfná na D , če je kompleksno odvedljiva v vsaki točki $z \in D$.

1.3 -

1.2. Trditve. Naj bo f definirana v okolici točke $z \in \mathbb{C}$.
Kaslednje lastnosti so ekvivalentne:

(i) f je $\mathbb{C}$ -odvedljiva v z .

(ii) f je diferencialna v z in

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0 \quad \dots \quad \text{CR enačba}$$

(iii) $f = u + iv$ je diferencialna v z in velja

$$\left. \begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned} \right\} \text{CR-sistem.}$$

V primeru, da (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) veljajo, sledi

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z).$$

Dokaz: (i) $\Rightarrow$ (ii): $\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z) + \eta(h); \lim_{h \rightarrow 0} \eta(h) = 0$

$$f(z+h) = f(z) + f'(z) \cdot h + o(h)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = f'(z), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Obratno: $\partial \bar{z}$ (1.1) dobimo

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\partial f}{\partial z}(z) \cdot \frac{h}{h} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \cdot \frac{\bar{h}}{h} + \frac{o(h)}{h}$$

Limita pri $h \rightarrow 0$ obstaja in je enaka $\frac{\partial f}{\partial z}(z)$

naštano zdej, ko je $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0$. Torej (ii) $\Rightarrow$ (i).

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): preprost račun.

1.4 -

1.3. Trditev: Če je $f = u + iv$ holomorfná, sta u in v harmonični:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \Delta v = 0.$$

Dokaz, skema.

Opomba: f antiholomorfná $\Leftrightarrow \bar{f}$ holomorfná

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

$$\text{Dokaz: } \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}; \quad \bar{f} \text{ holo.} \Leftrightarrow \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0.$$

NALOGA:

1.4. Trditev: (Verižno pravilo).

Naj bo f diferenciable v z in g dif. v točki $f(z)$. Potem:

$$\begin{cases} \frac{\partial (g \circ f)}{\partial z} \Big|_z = \frac{\partial g}{\partial w}(f(z)) \cdot \frac{\partial f(z)}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}}(f(z)) \cdot \frac{\partial \bar{f}(z)}{\partial z} \\ \frac{\partial (g \circ f)}{\partial \bar{z}} \Big|_z = \frac{\partial g}{\partial w}(f(z)) \cdot \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}}(f(z)) \cdot \frac{\partial \bar{f}(z)}{\partial \bar{z}} \end{cases}$$

1.5. Posledica: Če sta f in g kompleksno odvedljivi v z oz.

v $g(f)$, je $g \circ f$ $\mathbb{C}$ -odvedljiva v z .

Kompozicija holo fn. je spet holo.

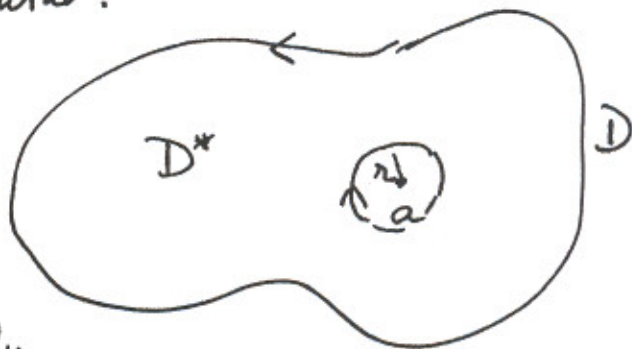
I.2. Cauchy-Greenova in Cauchyjeva formula.

Naj bo $D \subset \mathbb{C}$ omejeni domeni s $\mathcal{C}^1$ -robom ∂D ,
~~omejeni~~ orientiranim koherentno.

$$f = u + iv \in \mathcal{C}^1(\bar{D}).$$

$$dz = dx + i dy.$$

$$\oint_{\partial D} f(z) dz = \oint_{\partial D} \overbrace{f(z)}^P dx + i \overbrace{f(z)}^Q dy$$



$$\begin{aligned} (\text{Greenova f.}) &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (i f) - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy \\ &= 2i \iint_D \frac{1}{2} (f_x + i f_y) dx dy \end{aligned}$$

$$\boxed{\oint_{\partial D} f(z) dz = 2i \iint_D f_{\bar{z}} \cdot dx dy}$$

Greenova formula v kompleksnem zapisu.

Posledica: Če je f holomorfnna na D , je $\oint_{\partial D} f dz = 0$. (2.1)

Fiksiramo točko $a \in D$, $r > 0$,

$$D(a, r) = \{z \mid |z - a| < r\} \subset D;$$

$$D^* = D \setminus D(a, r);$$

$$\partial D^* = \partial D \cup \underbrace{\{|z - a| = r\}}_{\text{negativno orientiran.}}$$

Uporabimo Greenovo formulo za funkcijo

$$\frac{f(z)}{z - a} \in \mathcal{C}^1(\bar{D}^*):$$

4.6 -

$$\oint_{\partial D^*} \frac{f(z)}{z-a} dz = \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} dz - \oint_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

$$= 2i \iint_{D^*} \frac{f_{\bar{z}}(z)}{z-a} dx dy \quad ; \quad f_{\bar{z}} = \partial f / \partial \bar{z}.$$

Opomba: $\frac{1}{z-a} \in L'_{loc}(\mathbb{C})$ (lokalno integrabilna),
kar vidimo s prehodom v lokalne koordinate.

$$\oint_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz = \oint_{|z-a|=r} \frac{f(a)}{z-a} dz + \oint_{|z-a|=r} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} dz$$

$$= 2\pi i f(a) + o(r),$$

ker je $\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ omejena v okoliščini točke a .

Limetni prehod pri $r \downarrow 0$ nam da

$$\oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} dz - 2\pi i f(a) = 2i \iint_D \frac{f_{\bar{z}}(z)}{z-a} dx dy$$

Po deljenju z $2\pi i$ in preureditvi dobimo

$$\boxed{f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} dz - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{f_{\bar{z}}(z)}{z-a} dx dy} \quad (2.2)$$

Ta formula, ki velja za $f \in C^1(\bar{D})$ in $a \in D$,
se imenuje Cauchy-Greenova formula.

Posebni primeri:

(A) f holomorfnе na D , $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ na D .
 Dobimo

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z) dz}{z-a}; \quad a \in D. \quad (2.3)$$

To je Cauchyeva formula za hol. funkcijo.

[Opomba: Tu predpostavimo $f \in C^1(D)$.

Ta predpostavka je nepotrebna: ista formula velja, če je $f \in C(D)$ in $f|_D$ holomorfnа.

Holomorfnе fn. je avtomatično razreda C^1 ;
 glej Cauchy-Goursatov izvek.]

(B) $f \in C_0^1(\mathbb{C})$... C^1 -gladka funkcija s kompaktnim nosilcem $\text{supp } f$.

Uporabimo CG - formulo na velikem disku, ki vsebuje $\text{supp } f$ v notranjosti. Dobimo:

$$\begin{aligned} f(a) &= -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{(\partial f / \partial \bar{z})(z)}{z-a} dx dy \quad (2.4) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial f / \partial \bar{z}}{z-a} dz \wedge d\bar{z} \end{aligned}$$

$$\left[\begin{aligned} dz &= dx + i dy, \quad d\bar{z} = dx - i dy \\ dz \wedge d\bar{z} &= (dx + i dy) \wedge (dx - i dy) = -2i dx \wedge dy. \end{aligned} \right].$$

1.8-

$$(c) \quad f(z) \equiv \bar{z}; \quad \partial f / \partial \bar{z} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = 1.$$

Obrimo:

$$\bar{a} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{\bar{z} dz}{z-a} - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{dx dy}{z-a}$$

Cauchy - Greenov operator:

$$\mu \in \mathcal{C}(\bar{D});$$

$$(\mathcal{T}_D \mu)(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \cdot d\eta \quad (\zeta = \xi + i\eta) \quad (2.5)$$

Splošnejši: μ regularna kompleksna Borelova mera na $\mathbb{C}$ s kompaktnim nosilcem.

$$(\mathcal{T}_{\mathbb{C}} \mu)(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z} \quad (2.6)$$

Cauchy - Greenova formula (2.2.) lahko pišemo v obliki

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + (\mathcal{T}_D f_{\bar{z}})(z)$$

I.3. Holomorfnost Cauchyevih integralov.

Naj bo C kompaktna $\mathbb{C}^1$ -krivulja v $\mathbb{C}$,
 notanotna, C naj bo vločena sklenjena (Jordanova,
 krivulja ali pa vločen lok. C orientiramo.

Naj bo $\varphi : C \rightarrow \mathbb{C}$ zvezna funkcija.

Ogledamo si integral

$$F(z) = \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus C. \quad (3.1)$$

Tak integral se imenuje
Cauchyevga tipa.



3.1. Trditev. Funkcija (3.1) je holomorfná na $\mathbb{C} \setminus C$.
 Za vsako točko $a \in \mathbb{C} \setminus C$ lahko F
 razvijemo v konvergentno potenčno vrsto

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

ki konvergira na največjem krogu
 $D(a, R) \subset \mathbb{C} \setminus C$.

Velja: $c_k = \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta \quad (k \in \mathbb{Z}_+).$

-610-

Dokaz. $z \in \mathbb{C} \setminus C$; $|h| < R$, kjer $\mathbb{D}(z, R) \subset \mathbb{C} \setminus C$.

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_C \left[\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z - h} - \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} \right] d\zeta$$

$$= \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z - h)} d\zeta$$

Pri limitnem prehodu $h \rightarrow 0$ dobimo

$$F'(z) = \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \quad (3.2)$$

Torej je F holomorfná na $\mathbb{C} \setminus C$.

Razvoj v vrsto: $a \in \mathbb{C} \setminus C$; $|z - a| < R = \text{dist}(a, C)$.

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - a}{\zeta - a}}$$

Ker je $|q| = \left| \frac{z - a}{\zeta - a} \right| < 1$, lahko razvijemo v geometrijsko vrsto:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{(z - a)^k}{(\zeta - a)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - a)^k}{(\zeta - a)^{k+1}}$$

Integriramo produkt te enačbe s $\varphi(\zeta)$:

$$F(z) = \int_C \frac{(z - a)^k}{(\zeta - a)^{k+1}} \cdot \varphi(\zeta) d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k$$

$$c_k = \int_C \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{k+1}}$$

fol-

Algorabimo to v posebnem primeru, ko je
 $f \in \mathcal{C}^1(\bar{D})$ in f holomorfná na D ,
 pri čemer vzamemo $C = \partial D$. Dobimo

3.2. IZREK: Če je $f \in \mathcal{C}^1(\bar{D})$ in holomorfná
 na D , (D = omejeni območje s $\mathcal{C}^1$ -robo),
 velja za vsako točko $a \in D$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k, \quad |z-a| < R = \text{dist}(z, \partial D)$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}} d\zeta \quad (3.3)$$

$$= \frac{k!}{2\pi i} f^{(k)}(a)$$

Dokaz. Vse razen zadnje vrstice sledi iz
 Trditve 3.1. Zadnje enakost dobimo z
~~deli~~ odvajanjem: potence vrste za $f(z)$,
 ali pa z večkratnim odvajanjem integrale
 (glej (3.2)).

3.3. Posledica. Holomorfná ^{$\mathcal{C}^1$} funkcija je poljubno
 mnogokrat $\mathcal{C}$ -odvedljiva. Vsi njeni odvodi
 so holomorfné funkcije.

3.4. Posledice (Cauchyeva integralne formule za odvode)

Če je $f \in \mathcal{O}^1(\bar{D})$ in f holomorfnе na D , velja

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi; \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad z \in D. \quad (3.4)$$

3.5. Posledice (Cauchyjeve neenakosti)

Naj bo f ~~zvezna~~ ^{$\mathcal{O}^1$} na krogu $\{|z - a| \leq r\}$
in holomorfnе na odprtem krogu $\{|z - a| < r\}$.

Potem velja:

$$|f^{(k)}(a)| \leq \frac{k!}{r^k} \cdot \max_{|z-a|=r} |f(z)|. \quad (3.5)$$

Pri razvoju $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$ velja

$$|c_k \cdot (z-a)^k| \leq |c_k| \cdot r^k \leq \max_{|z-a|=r} |f(z)| \quad (|z-a| \leq r)$$

Dokaz: Dirichtna ocena integrale.

Uporabimo tudi $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

I.4. Rešitev nehomogene Cauchy-Riemannove enačbe

Izrek. Naj bo $D \subset \mathbb{C}$ mejno območje z odsekoma C^1 -robom in naj bo $u \in C^1(\bar{D})$.

Potem funkcija $f(z) = T(u)(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta d\bar{\zeta}$

zadostva enačbi

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = u(z), \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \partial D. \quad (3.1)$$

Opomba. Enačba (3.1) se imenuje nehomogena

CR enačba. Izven nosilca $\text{supp } u$ je f holomorfná. f je enolično določena s pogojem $f(\infty) = 0$.

Dokaz. Najprej dokazimo, da je f holomorfná na $\mathbb{C} \setminus \text{supp } u \supset \mathbb{C} \setminus \bar{D}$:

Naj bo $z \in \mathbb{C} \setminus \text{supp } u$ in $h \in \mathbb{C}$ majhen. Velja:

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= -\frac{1}{\pi} \iint_D u(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - (z+h)} - \frac{1}{\zeta - z} \right) d\zeta d\bar{\zeta} \\ &= -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{u(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z - h)} d\zeta d\bar{\zeta} \end{aligned}$$

$h \rightarrow 0$:

$$f'(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{u(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta d\bar{\zeta} \quad (3.2)$$

Opomba: Integral na desni v (3.2) se imenuje Cauchyjev operator. Kot singularni integralni operator je definiran (v smislu Cauchyeve glavne vrednosti) tudi v točkah $z \in D$.

Oglejmo si sedaj poseben primer, ko ima $u \in C_0^1(\mathbb{C})$ kompakten nosilec. Tedaj

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{u(\xi) d\xi d\eta}{\xi - z}$$

Alwedemo $\xi - z = \xi' = x' + iy'$ (nova spremenljivka)

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\xi' \in \mathbb{C}} \frac{u(z + \xi') \cdot dx' dy'}{\xi'}$$

V tem integralu s parametrom z lahko odvajamo po $\bar{z}$ pod integralom:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial u(z + \xi') / \partial \bar{z} \cdot dx' dy'}{\xi'}$$

Očitno je ~~$\frac{\partial u(z + \xi')}{\partial \bar{z}}$~~ (verižno pravilo):

$$\frac{\partial u(z + \xi')}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u(z + \xi')}{\partial \bar{\xi}'} = \frac{\partial u(\xi)}{\partial \bar{\xi}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial u(z + \xi') / \partial \bar{\xi}'}{\xi'} dx' dy'$$

~~Če za funkcijo $\xi' \rightarrow u$~~

$$= -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \mu(\zeta) / \partial \bar{\zeta}}{\zeta - z} d\zeta d\bar{\zeta}$$

$$= \mu(z).$$

V zadnji vrstici smo uporabili Cauchy-Greenovo formulo za funkcije,
 $\mu \in \mathcal{L}_0^1(\mathbb{C})$ s kompaktnim nosilem.

Splošen primer: $a \in \mathbb{D}$; $r > 0$,
 $\mathbb{D}(a, 2r) \subset \mathbb{D}$.

Reberemo $\chi \in \mathcal{L}_0^\infty(\mathbb{C})$, $\chi = 1$ na $\mathbb{D}(a, r)$
 $\chi = 0$ izven $\mathbb{D}(a, 2r)$.

$$\begin{aligned} f(z) &= T(\mu)(z) \\ &= T(\chi\mu)(z) + T((1-\chi)\mu)(z). \end{aligned}$$

Ker ima $\chi\mu$ kompakten nosilec, je

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} T(\chi\mu)(z) = (\chi\mu)(z) = \chi(z) \mu(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Torej je $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} T(\chi\mu) = \mu$ na $\mathbb{D}(a, r)$.

Drugi integral $T((1-\chi)\mu)$ je holomorfen
 izven nosilca $(1-\chi)\mu$, torej tudi na $\mathbb{D}(a, r)$.

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = \mu \text{ na } \mathbb{D}(a, r) \Rightarrow \text{na } \mathbb{D}.$$

I.5. Teoremi Cauchy-Goursat in Morera.

Dosedanji rezultati o holomorfnih funkcijah so bili dokazani pod dodatno predpostavko, da je $f \in \mathcal{C}^1$. Videli smo, da je vsaka $\mathcal{C}^1$ -holomorfnna funkcija razreda $\mathcal{C}^\infty$ in vsi njeni kompleksni odvodi so spet holomorfnne funkcije. Torej so vsi ostali odvodi, v katerih nastopa vsaj en operator $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, enaki 0.

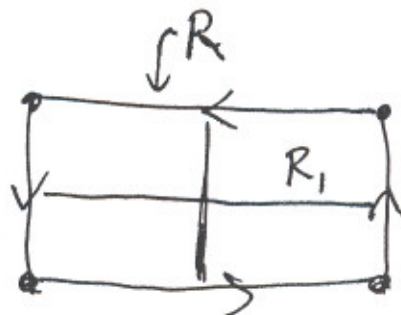
Sedaj bomo pokazali, da je vsaka holomorfnna funkcija ~~glede na~~ razreda $\mathcal{C}^1$, torej tudi $\mathcal{C}^\infty$.

Iz definicije holomorfnosti ($\mathbb{C}$ -odvedljivost v vsaki točki) sledi diferenciability, torej tudi zveznost.

5.1. Izrek (Cauchy-Goursat)

Če je f holomorfnna na območju D , potem za vsak kompakten pravokotnik $R \subset D$ velja:

$$\oint_{\partial R} f(z) dz = 0.$$



-1/7-

Dokaz. Označimo $A = \left| \int_{\partial R} f(z) dz \right|$ in predpostavimo

$A \neq 0$. Razdelimo R na 4 enake pravokotnike s podobnimi stranecami. Za enega od njih,

$$R_1, \text{ velja } \left| \int_{\partial R_1} f(z) dz \right| \geq \frac{A}{4}.$$

Postopek ponavljamo in dobimo zaporedje' složenih pravokotnikov $R = R_0 > R_1 > R_2 > \dots$,

tako da ima R_k stranice 2^{-k} . (stranice od R_0)

ter

$$\left| \int_{\partial R_k} f(z) dz \right| \geq 4^{-k} A. \quad (5.1)$$

Naj bo $z_0 = \bigcap_{k=0}^{\infty} R_k$ (natančno ena točka).

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \eta(z);$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{\eta(z)}{z - z_0} \right| = 0.$$

$$\int_{\partial R_k} f(z) dz = \int_{\partial R_k} \eta(z) dz \quad (\text{druga dva člena se integrirata v 0}).$$

$$\begin{aligned} \text{Torej } \left| \int_{\partial R_k} f dz \right| &\leq \int_{\partial R_k} |\eta(z)| |dz| \leq \underbrace{o(2^{-k})}_{\text{ocena } \eta} \cdot \underbrace{O(2^k)}_{\text{dolžina } \partial R_k} \\ &= o(4^{-k}). \end{aligned}$$

To je v protislovju z oceno (5.1).

4.2. Izrek (Morera za $\square$)

Naj bo f zvezna funkcija na območju $D \subset \mathbb{C}$.
Če za vsak kompakten pravokotnik $R \subset D$ velja:

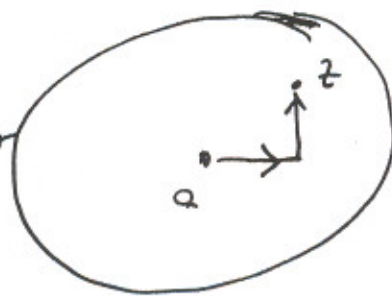
$$\oint_{\partial R} f(z) \cdot dz = 0 \quad (4.2)$$

potem je f gladka holomorfná na D .

Odkaz. Izrek je lokalni, zato lahko vzamemo, da je D krog $D(a, r)$.

Za vsako točko $z \in D$ definiramo

$$F(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^z f(\zeta) d\zeta,$$



kjer integriramo po dveh segmentih, vzporednih koordinatnim osenám. Vrstni red integracije ni pomemben zaradi poyezja (4.2).

lahko je videti:

$$\partial F / \partial x = f, \quad \partial F / \partial y = if.$$

Torej je $F \in \mathcal{C}^1(D)$ in $\partial F / \partial \bar{z} \equiv 0$. Odtod po $\bar{z}$ znanih izrekih sledi, da je F gladka holomorfná.

Ker je $f = F'$, sledi ~~da~~ ^{isto} f po $\bar{z}$ znanih izrekih.

5.3 Opomba: Izrek Morera lahko dokazemo tudi za Δ , $\mathbb{D}$, ... Pogoji (5.2) se imenuje momentni pogoji.

Izreka 4.1 in 4.2 skupaj dasta

5.4. Posledica: Vsaka holomorfná funkcia je gladka. Vsi njini (kompleksni) odvodi so holomorfne fu.

5.5. Definicija: ~~$A \subset \mathbb{C}$~~ ; $D \subset \mathbb{C}$

$$A(D) = \{f \in \mathcal{C}(\bar{D}) \mid f|_D \text{ je holomorfná na } D\}.$$

5.6. Izrek (Cauchy). Naj bo $D \subset \mathbb{C}$ omejeno območje z odsekoma $\mathcal{C}^1$ robom. Za vsako fu. $f \in A(D)$ velja

$$\oint_{\partial D} f(z) dz = 0$$

in

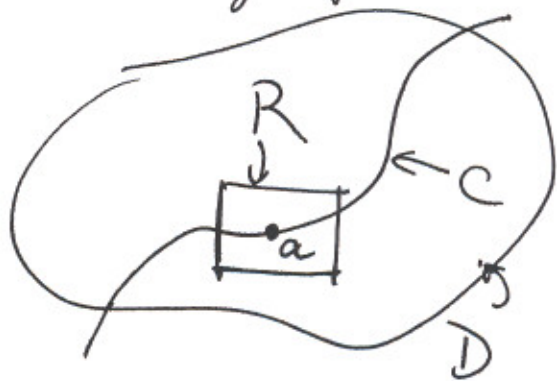
$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} dz, \quad a \in D.$$

Zadnji integral je enak 0 za $a \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}$.

Dokaz: Za $f \in \mathcal{C}^1(\bar{D})$ to že vemo. Območje D aproksimiramo od znotraj z območji $D' \subset\subset D$ z odsekoma $\mathcal{C}^1$ robom, uporabimo že znani izrek na D' (saj je $f \in \mathcal{C}^1(\bar{D})$), nato naredimo limitni prehod $D' \rightarrow D$.

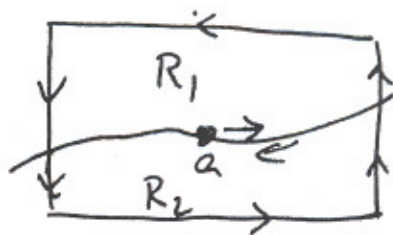
5.7. Izrek. Dokažimo, da je $f \in \mathcal{H}(D)$,
 $C \subset D$ je vložena $\mathcal{C}^1$ -krivulja in f je
 holomorfnna na $D \setminus C$. Potem je f
 holomorfnna na D .

Dokaz. Posredno je dokazati
 holomorfnost v določen
 točki $a \in C$.



Izberemo majhen pravokotnik R okrog a .

Lok $C \cap R$ ga razdeli na dva dele,
~~enaki~~ R_1 in R_2 , s skupnim delom roba
 $\partial R_1 \cap \partial R_2 = C \cap R$.



Očitno je

$$\oint_{\partial R} f(z) dz = \oint_{\partial R_1} f dz + \oint_{\partial R_2} f dz.$$

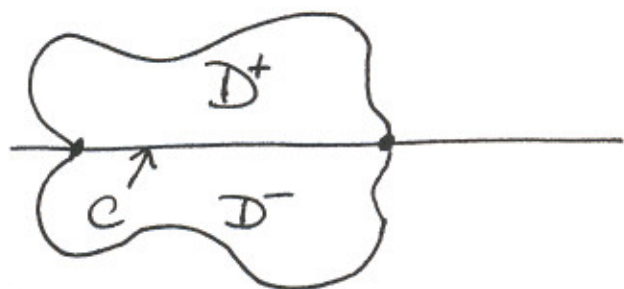
Vsak od teh integralov na desni je enak 0,
 saj je f holomorfnna v notranjosti R_1 in R_2 .

Dodamo $\oint_{\partial R} f dz = 0$ za vsak
 majhen pravokotnik R . Sedaj uporebimo
 Izrek **5.2.** (Morera).

5.8 - 21 -
5.8. Izrek (Schwarzov princip zrcaljenja).

Naj bo D^+ območje
 v zgornji polravnini

$$H = \{x+iy \mid y > 0\};$$



$$C = \overline{D^+} \cap \partial H = \{x+iy \in \overline{D^+} \mid y=0\}.$$

Naj bo f zvezna funkcija na $D^+ \cup C$,
 ki je holomorfnna na D^+ in ima realne
 vrednosti na C ($f(C) \subset \mathbb{R}$).

Potem se f holomorfnno razširi
 na območje ~~$D = D^+ \cup D^- \cup C$~~

$$D = D^+ \cup D^- \cup C,$$

$$\text{ker je } D^- = \{z = x-iy \mid \bar{z} \in D\}$$

$$= \{\bar{z} \mid z \in D\} \dots \text{zrcaljenje}$$

Dokaz: $F(z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(z), & z \in D^+ \cup C \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in D^- \cup C \end{cases}$... območje.

Preverimo, da je F zvezna na D ~~in holomorfnna~~
 in holomorfnna na D^- . Torej je F holomorfnna
 po Izreku Morera (oz. po Izreku 4.6).

I. 6. IZREK O ODPRTI PRESLIKAVI.

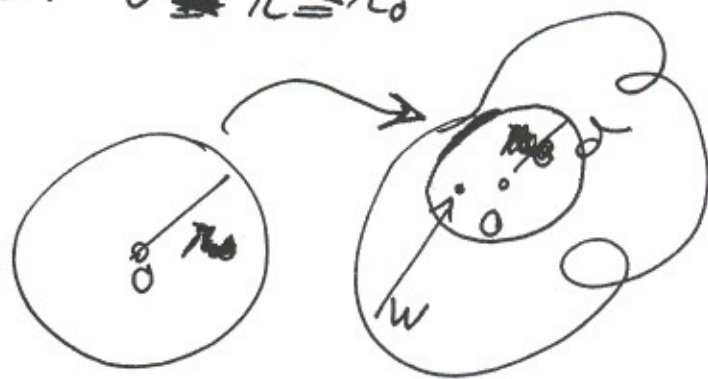
6.1. IZREK Naj bo f nekonstantna holomorfná funkcia na prevezanem območju $D \subset \mathbb{C}$. Potem je f odprta (to je, f -slika vsake odprte množice je odprta).

Dokaz: Levo je dokazati, da je f -slika vsakega majhnega kroga $D(a, r) \subset D$ odprta. Lahko vzamemo $a=0$, $f(a)=0$.

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \dots \quad (\text{Taylorjev razvoj}) \\ &= a_k z^k (1 + b_1 z + \dots) \end{aligned}$$

Reberemo $r_0 > 0$ tako, da drug faktor nima ničle na $\overline{D(0, r_0)}$; torej je edina ničla f na tem disku v 0. $0 \leq r \leq r_0$

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \min_{|z|=r_0} |f(z)| > 0.$$



Naj bo $w \in D(0, \delta)$,
 $|w| < \delta$.

Recimo, da $w \notin f(D(0, r))$. Potem je funkcija $g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$

-h23-

holomorfna na $\mathbb{D}(0, r)$ in zvezna na $\overline{\mathbb{D}(0, r)}$
(v resnici je holomorfna na nekaterem
odprtju diska).

Po Cauchyevi oceni je

$$|g(0)| \leq \sup_{|z|=r} |g(z)| \quad \left(\begin{array}{l} \text{Ribki princip} \\ \text{maksimuma} \end{array} \right)$$

$$\frac{1}{|w|} = \sup_{|z|=r} \frac{1}{|g(z) - w|} \quad (*)$$

Trikotniška neenakost:

$$|g(z) - w| \geq |g(z)| - |w| \geq \delta - |w| \quad \text{za } |z|=r.$$

$$\frac{1}{|g(z) - w|} \leq \frac{1}{\delta - |w|} \quad (|z|=r).$$

Torej iz zgornjega (*) sledi:

$$\frac{1}{|w|} \leq \frac{1}{\delta - |w|}$$

$$\Leftrightarrow |w| \geq \delta - |w|$$

$$\Leftrightarrow |w| \geq \delta/2.$$

$$\text{Torej: } w \notin g(\mathbb{D}(0, r)), |w| < \delta \Rightarrow |w| \geq \delta/2.$$

$$\Rightarrow g(\mathbb{D}(0, r)) \supset \mathbb{D}(0, \delta/2).$$

Drugi dokaz: $z(0) = 0$, z nekonstantna.

$$f(z) = z^k \cdot g(z), \quad g(0) \neq 0, \quad g \text{ holomorfna.}$$

$k \in \mathbb{N}$

$$g = e^h, \quad h = \log g = \text{holomorfna.}$$

$$g^{1/k} = e^{h/k}, \quad \text{holomorfna } k\text{-ti koren fu. } g.$$

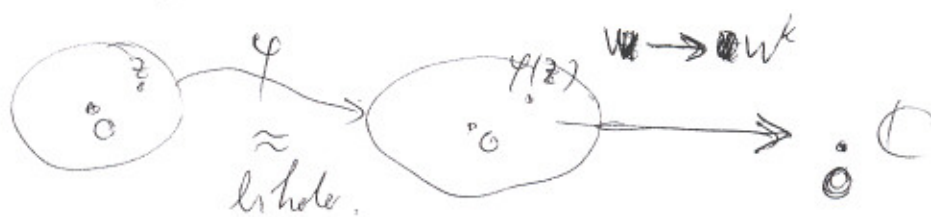
$$f(z) = z^k \cdot (g^{1/k}(z))^k = (z \cdot g^{1/k}(z))^k = \varphi(z)^k$$

$$\begin{cases} \varphi(z) \stackrel{\text{def}}{=} z \cdot g^{1/k}(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = g^{1/k}(0) \neq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \varphi$ liholomorfna v okolici 0.

Torej je f kompozicija liholomorfne pr. φ in k -te potence:



Posledica 1: za vsak $b \in \mathbb{C}$ blizu 0, $b \neq 0$,
ima enačba $f(z) = b$ natanko k -rešitev
 $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$ v okolici točke 0.

Posledica 2: Če je holomorfna preslikava $f: D \rightarrow \mathbb{C}$
injektivna, je $f'(z) \neq 0, \forall z \in D$. Torej je f
liholomorfna na $f(D)$.

I. 7. Princip maksimuma.

Naj bo f holomorfa na $D \subset \mathbb{C}$.

Za vsak $a \in D$, $r > 0$, $\mathbb{D}(a, r) \subset D$,

velja po Cauchyevi oceni:

$$|f(a)| \leq \sup_{|z-a|=r} |f(z)| = \max_{|z-a|=r} |f(z)|.$$

To delamo iz:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

z oceno abs. vrednosti. Odtod,

7.1. Trditev, če je $f \in \mathcal{O}(D)$ potem $|f|$ nima
notranjega lokalnega maksimuma.

7.2. Posledice: Edini lokalni min $|f|$ je v
točki, kjer je $f = 0$.

~~Sedaj bomo dokazali~~

7.3. Posledice: Če je $f \in \mathcal{A}(D)$, je

$$|f(a)| \leq \sup_{z \in \partial D} |f(z)|, \quad \forall a \in D.$$

Sedaj bomo dokazali naslednjo splošnejšo verzijo:

7.4. IZREK Naj bo $D \subset \mathbb{C}$ omejeno podzmo-
 stvo in $f \in O(D)$ nekonstantna.

~~Domena~~ Naj bo

$$M = \sup_{z \in \partial D} \left(\limsup_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ \zeta \in D}} |f(z)| \right) \in [0, +\infty].$$

Tedaj je $|f(z)| < M$ za vsak $z \in D$.

Dokaz. Lahko vzamemo $M < +\infty$, sicer ni
 kaj dokazovati.

(Opomba: Če je $f \in C(\bar{D})$, je $M = \sup_{\zeta \in \partial D} |f(\zeta)|$).

Iz definicije M sledi, da za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja
 odprava U roba ∂D , tako da je

$$|f(z)| < M + \varepsilon, \quad \forall z \in D \cap U.$$

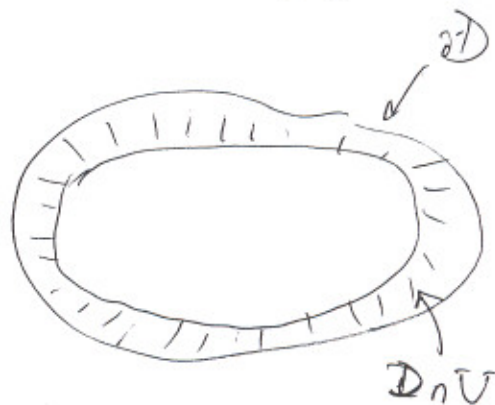
~~Zbiranje~~ Po principu maks. za
 omejeje $D' = D \setminus \bar{U}$ sledi

$$|f(z)| < M + \varepsilon, \quad \forall z \in D$$

Odkod $|f(z)| \leq M, \quad \forall z \in D \quad (\varepsilon \downarrow 0).$

Ker je f nekonstantna, je odprta; zato

$$|f(z)| < M, \quad \forall z \in D.$$



I.8. Schwarzova lema in posledoce

izrek. Naj bo $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorfa,
 $\mathbb{D} = \{ |z| < 1 \}$

$$f(0) = 0.$$

$$\text{Tedy } \begin{cases} |f(z)| \leq |z|, \forall z \in \mathbb{D} \\ |f'(0)| \leq 1 \end{cases}$$

Če velja $|f(z)| = |z|$ za nek $z \neq 0$,
 ali če velja $|f'(0)| = 1$, je f konstantna.

$$f(z) = e^{i\theta} z.$$

Dokaz: $f(z) = z \cdot g(z),$
 $\limsup_{|z| \rightarrow 1} |g(z)| \leq 1$

$$\Rightarrow |g(z)| \leq 1 \text{ na } \mathbb{D}$$

$$\Rightarrow |f(z)| \leq |z|$$

$$|f'(0)| = |g(0)| \leq 1.$$

Obzato: enost $\Leftrightarrow g = \text{konstanta},$
 $g = e^{i\theta}$

$$\text{Tedy } f(z) = e^{i\theta} z.$$

I.8.

- 1.28 -

Uporaba principa maksimuma(1) Automorfizmi diske $\mathbb{D}$: $\text{Aut}(\mathbb{D})$.

$$\text{Aut } \mathbb{D} = \left\{ z \mapsto e^{i\theta} \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \mid a \in \mathbb{D}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\dim_{\mathbb{R}} \text{Aut } \mathbb{D} = 3$$

Dokaz: $f \in \text{Aut } \mathbb{D}$;

$$\lim_{|z| \rightarrow 1} |f(z)| = 1; \quad \exists! a \in \mathbb{D} : f(a) = 0.$$

Zapišemo $f(z) = g(z) \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$

Tedy je g holomorfná na $\mathbb{D}$,
 $\lim_{|z| \rightarrow 1} |g(z)| = 1$.

Sledi $|g| \leq 1$ na $\mathbb{D}$. Ker je g brez ničel,
 uporabimo isti sklep za $\frac{1}{g}$: $\left| \frac{1}{g} \right| \leq 1$.

Torej je g konstanta, $g = e^{i\theta}$.

(2) Prave holomorfné preslikave $\mathbb{D} \xrightarrow{f} \mathbb{D}$:

Def: $\forall z_j \in \mathbb{D}, z_j \rightarrow \partial\mathbb{D} \Rightarrow f(z_j) \rightarrow \partial\mathbb{D}$.
 $(|z_j| \rightarrow 1 \Rightarrow |f(z_j)| \rightarrow 1)$.

12.12.2017 $\forall f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ prava holomorfná

IZREK. Vsake prava holomorfnе preslikava $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ je oblike

$$f(z) = e^{i\theta} \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}$$

kjer so $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$ poljubne točke.

n = stopnja f

$= \# \{ f^{-1}(w) \mid w \in \mathbb{D} \}$ število
algebranskih.

Opomba: $B(z) = \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}$ se imenuje

(končen) Blaschkejev produkt.

Dokaz: $f^{-1}(0) = \{a_1, \dots, a_n\}$,
z večkratnostmi.

Tedy $f(z) = g(z) \cdot B(z)$,

$g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, g brez ničel

$\lim_{|z| \rightarrow 1} |g(z)| = 1 \Rightarrow g$ konstanta
(kot prej).

I.9. Osnovni izrek algebre

IZREK: Njaka bo $f(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_0$
nekonstanten holomorfen polinom; $c_n \neq 0$.

Tedaj je $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

Posledice: f ima vsaj eno ničlo: $\left. \begin{array}{l} \exists a \in \mathbb{C} \quad \exists: f(a) = 0. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{OSNOVNI} \\ \text{IZREK} \\ \text{ALGEBRE} \end{array}$

Posledice: $f(z) = c_n \prod_{j=1}^n (z - z_j)$, $z_1, \dots, z_n$ ničle.

Dokaz: $f(\mathbb{C})$ je odprta v $\mathbb{C}$ (izrek o odprti presl.).

Dokazimo, da je $\overline{f(\mathbb{C})} = f(\mathbb{C})$. (tedaj $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$).

$w \in \overline{f(\mathbb{C})}$; $\exists z_1, z_2, \dots \in \mathbb{C}$

$$f(z_j) \rightarrow w.$$

Dokazimo, da je zaporedje $\{z_j\}$ omejeno:

$$f(z) = c_n z^n \cdot \left(1 + \frac{c_{n-1}}{c_n} \cdot \frac{1}{z} + \dots \right)$$

$$|f(z)| \geq |c_n| \cdot |z|^n \cdot \frac{1}{2}, \quad \forall |z| \geq R > 0 \text{ za nek } R.$$

$$|z|^n \leq \frac{2}{|c_n|} |f(z)|, \quad |z| \geq R. \quad \text{Dokazano.}$$

Sledi, da obstaja konvergentno podzaporedje

$$z_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} z_0 \in \mathbb{C}; \quad f(z_0) = w.$$