

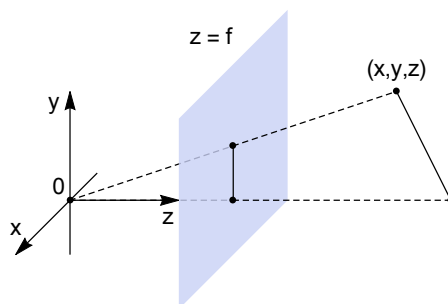
Afina in projektivna geometrija

Projektivna ravnina

- (1) Objekte v $\mathbb{R}^3$ bi radi projicirali na ravnino $z = 1$ vzdolž žarkov skozi koordinatno izhodišče.
- (a) Zapiši predpis za to projekcijo.
- (b) Ugotovi, kam se projicirata poltraka:

$$p_1 : \vec{r} = (1, -2, 1+t), t \geq 0,$$
$$p_2 : \vec{r} = (-1, -2, 1+t), t \geq 0.$$

Rešitev: (a) Recimo, da imamo točko $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ki leži desno od ravnine $z = f$. Njena projekcija na ravnino $z = f$ vzdolž žarka skozi izhodišče je presek žarka in pa ravnine. Takšni projekciji rečemo centralna projekcija.

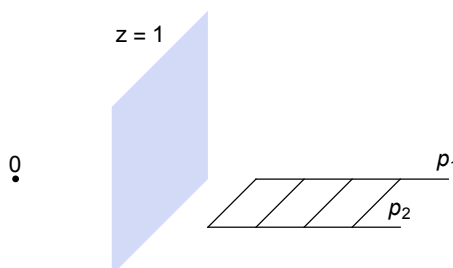


Žarek lahko parametriziramo s predpisom $p : \vec{r} = k(x, y, z)$. Če želimo, da bo zadnja koordinata enaka f , mora biti $k = f/z$, kar nam da predpis

$$\phi(x, y, z) = \left(\frac{fx}{z}, \frac{fy}{z} \right).$$

Mislimo si lahko, da usmerimo fotoaparat v smeri osi z in napravimo sliko. Ta projekcija nam potem določa, kakšna je slika nekega tridimenzionalnega objekta. S parametrom f lahko povečujemo oziroma zmanjšujemo velikost slik objektov. V nadaljevanju se bomo omejili na primer, ko je $f = 1$.

(b) Pri tej nalogi bomo izračunali, kaj bi videli, če bi naš pogled usmerili vzdolž železniških tirov.



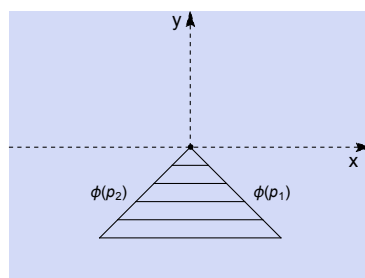
Poltrak p_1 je parametriziran s predpisom

$$p_1 : \vec{r} = (1, -2, 1 + t),$$

njegova projekcija pa je krivulja

$$\phi(p_1) : \vec{r} = \left(\frac{1}{1+t}, -\frac{2}{1+t} \right).$$

Ko t preteče interval $[1, \infty)$, v projekciji dobimo daljico od točke $(1, -2)$ do točke $(0, 0)$. Na podoben način lahko izračunamo, da je slika poltraka p_2 daljica od točke $(-1, -2)$ do točke $(0, 0)$. V projekciji se sicer vzporedna poltraka sekata v točki na obzorju.



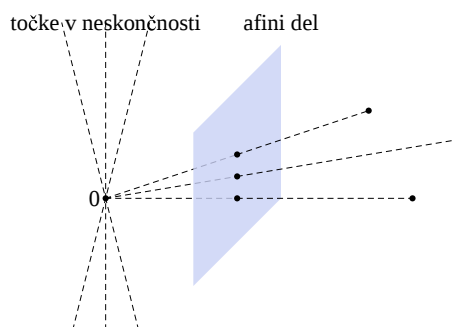
V nadaljevanju bomo našli nekaj ključnih lastnosti centralne projekcije:

- (1) Vzporodnice v $\mathbb{R}^3$, ki niso vzporodne ravnini fotoaparata, se na sliki sekajo v točki v neskončnosti, ki jo dobimo kot presek ravnine fotoaparata s tisto izmed vzporodnic, ki gre skozi središče projekcije.
- (2) Vzporodnice v $\mathbb{R}^3$, ki so vzporodne ravnini fotoaparata, so vzporodne tudi na sliki.
- (3) Če sta dva objekta v $\mathbb{R}^3$ enako velika, je tisti, ki je bližje fotoaparatu, na sliki večji. $\square$

(2) V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ poišči:

- (a) premico, ki poteka skozi točki $T_1 = [2 : 3 : 1]$ in $T_2 = [1 : 4 : 1]$,
- (b) presek premic $p_1 = \{[x : y : z] \mid x + y + z = 0\}$ in $p_2 = \{[x : y : z] \mid -x + y - z = 0\}$.

Rešitev: Prejšnja naloga nam je pokazala, da premice v evklidskem prostoru ustrezajo točkam na ravnini, na katero projiciramo. Če smo povsem natančni, to velja za premice, ki niso vzporodne ravnini. Če jim dodamo še množico teh premic, dobimo projektivno ravnino. Ravnina, na katero projiciramo, tvori afini del projektivne ravnine, množica premic, ki so ji vzporodne, pa tako imenovano premico v neskončnosti. Mislimo si lahko, da afini ravnini dodamo za vsako smer še po eno točko v neskončnosti. Tako dosežemo, da se dve vzporodni premici sekata v ustrezni točki v neskončnosti.



Formalno definiramo projektivno ravnino $P(\mathbb{R}^3)$ na naslednji način:

- točke v $P(\mathbb{R}^3)$ ustrezajo premicam skozi izhodišče v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^3$,
- premice v $P(\mathbb{R}^3)$ ustrezajo ravninam skozi izhodišče v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^3$.

Vsako premico p v $\mathbb{R}^3$, ki poteka skozi izhodišče, lahko parametriziramo s predpisom

$$p : \vec{r} = t\vec{s},$$

kjer je $\vec{s} = (x, y, z)$ njen smerni vektor. Torej je vsaka taka premica določena s svojim smernim vektorjem, zato lahko premico p na kratko opišemo z oznako

$$p = [x : y : z].$$

Če gledamo premico p kot točko projektivne ravnine $P(\mathbb{R}^3)$, rečemo, da so $[x : y : z]$ njene homogene koordinate. Ker je smerni vektor premice določen le do skalarnega večkratnika natančno, velja

$$[x : y : z] = [\lambda x : \lambda y : \lambda z]$$

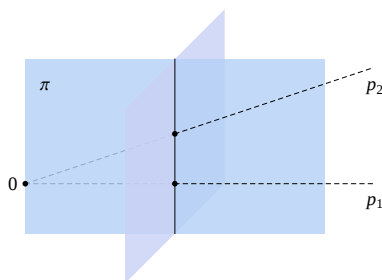
za vsak $\lambda \neq 0$. Na projektivno ravnino $P(\mathbb{R}^3)$ lahko torej gledamo tudi kot na množico ekvivalenčnih razredov trojic $[x : y : z]$, ki imajo vsaj eno koordinato neničelno.

(a) Imamo točki $T_1 = [2 : 3 : 1]$ in $T_2 = [1 : 4 : 1]$ v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$, ki ju lahko predstavimo s premicama:

$$p_1 : \vec{r} = t(2, 3, 1),$$

$$p_2 : \vec{r} = t(1, 4, 1)$$

v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^3$.



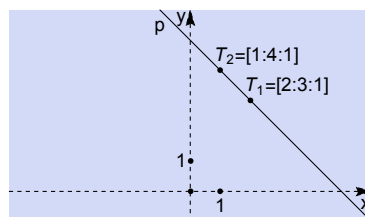
Ti dve premici natanko določata ravnino Π skozi izhodišče, ki pa po drugi strani določa premico p skozi točki $[2 : 3 : 1]$ in $[1 : 4 : 1]$ v projektivni ravnini. Ta ravnina ima smer normale

$$\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = (2, 3, 1) \times (1, 4, 1) = (-1, -1, 5).$$

Premica p skozi točki $[2 : 3 : 1]$ in $[1 : 4 : 1]$ v $P(\mathbb{R}^3)$ je torej množica

$$p = \{[x : y : z] \mid x + y - 5z = 0\} \subset P(\mathbb{R}^3).$$

Na afinem delu $z = 1$ je premica p določena z enačbo $x + y = 5$. Poleg točk v afinem delu pa ta premica vsebuje še točko v neskončnosti $[1 : -1 : 0]$.



(b) Sedaj iščemo presek premic:

$$p_1 = \{[x : y : z] \mid x + y + z = 0\},$$

$$p_2 = \{[x : y : z] \mid -x + y - z = 0\}$$

v projektivni ravnini. Ti dve premici sta določeni z ravninama:

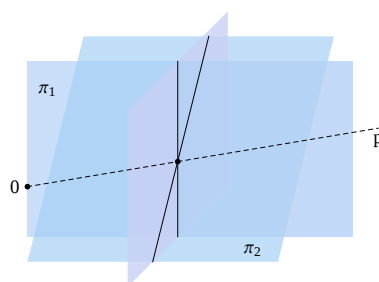
$$\Pi_1 : x + y + z = 0,$$

$$\Pi_2 : -x + y - z = 0$$

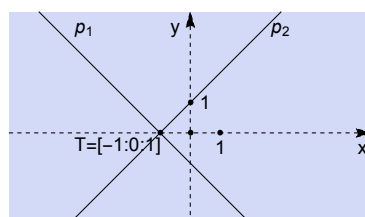
v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^3$. Njun presek v $\mathbb{R}^3$ je premica p s smernim vektorjem

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1, 1, 1) \times (-1, 1, -1) = (-2, 0, 2).$$

Od tod sledi, da je presek premic p_1 in p_2 točka $T = [-1 : 0 : 1]$.



Na afinem delu $z = 1$ imata premici p_1 in p_2 enačbi $x + y = -1$ in $-x + y = 1$, točka T pa ima koordinati $(-1, 0)$.



□

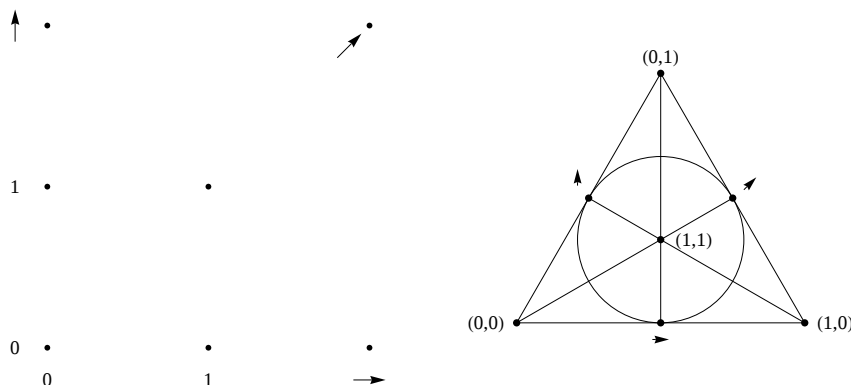
(3) Izračunaj število točk in število premic v projektivni ravnini $P(\mathbb{F}_p^3)$.

Rešitev: Točke v projektivni ravnini $P(\mathbb{F}_p^3)$ ustrezajo premicam skozi izhodišče v prostoru $\mathbb{F}_p^3$. Vemo že, da je takšnih premic $\frac{p^3-1}{p-1}$, zato ima projektivna ravnina $P(\mathbb{F}_p^3)$

$$\frac{p^3 - 1}{p - 1} = p^2 + p + 1$$

točk. Do tega rezultata lahko pridemo tudi drugače, če upoštevamo, da je projektivna ravnina unija afine ravnine in pa premice v neskončnosti. Afina ravnina $\mathbb{F}_p^2$ vsebuje p^2 točk, točke na premici v neskončnosti pa ustrezajo ekvivalenčnim razredom vzporednih premic v $\mathbb{F}_p^2$. Teh razredov je ravno $p + 1$, zato ima projektivna ravnina $P(\mathbb{F}_p^3)$ natanko $p^2 + p + 1$ točk.

Kot primer si pogledjmo projektivno ravnino $P(\mathbb{F}_2^3)$. Sestoji iz štirih točk v afini ravnini in treh točk na premici v neskončnosti, ki ustrezajo trem smerem v afini ravnini. Tej ravnini rečemo Fanova ravnina in jo pogosto ponazorimo z diagramom na desni sliki.



Po principu dualnosti je tudi število premic v projektivni ravnini $P(\mathbb{F}_p^3)$ enako $p^2 + p + 1$. Bolj eksplicitno pa lahko to vidimo, če preštejemo, koliko ravnin v prostoru $\mathbb{F}_p^3$ gre skozi izhodišče. Vsaka takšna ravnina je določena z enačbo

$$ax + by + cz = 0,$$

kjer je $(a, b, c) \in \mathbb{F}_p^3$ neničeln vektor, ki igra vlogo normale na ravnino. Ker vzporedni normalni vektorji določajo isto ravnino, je ravnin skozi izhodišče v $\mathbb{F}_p^3$ ravno toliko kot je premic skozi izhodišče. $\square$

- (4) Opiši konstrukcijo aksiomatsko definirane projektivne ravnine iz aksiomatsko definirane afine ravnine.

Rešitev: Aksiomi aksiomatsko definirane projektivne ravnine so podobni aksiomom afine ravnine, le da aksiom o vzporednicah nadomestimo z aksiomom, da se poljubni dve premici sekata. Aksiomi aksiomatsko definirane projektivne ravnine so:

P1 Vsak par točk leži na natanko eni premici.

P2 Vsak par premic se seka v natanko eni točki.

P3 Obstajajo 4 točke, od katerih nobena trojica ni kolinearna.

V preteklih nalogah smo spoznali analitično definicijo projektivne ravnine oblike $P(\mathcal{O}^3)$ za nek obseg $\mathcal{O}$. Sedaj pa bomo spoznali konstrukcijo projektivne ravnine iz afine ravnine.

Naj bo torej $\mathcal{A}$ aksiomatsko definirana afina ravnina. Vzporednost je ekvivalenčna relacija na množici premic v $\mathcal{A}$, ekvivalenčne razrede vzporednih premic pa si lahko predstavljamo kot smeri v $\mathcal{A}$. Projektivno ravnino $P(\mathcal{A})$ bomo sedaj konstruirali tako, da bomo točkam $\mathcal{A}$ dodali smeri v $\mathcal{A}$. Torej je

$$P(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \cup \{\text{smeri v } \mathcal{A}\}.$$

Premice v $P(\mathcal{A})$ bodo dveh oblik. S

$$p_\infty = \{\text{smeri v } \mathcal{A}\}$$

bomo označili tako imenovano premico v neskončnosti, ki vsebuje vse točke, ki smo jih dodali afini ravnini $\mathcal{A}$. Za poljubno premico p v $\mathcal{A}$ pa definirajmo premico

$$\tilde{p} = p \cap \{[p]\}.$$

Vsaki premici v $\mathcal{A}$ torej dodamo ustrezno točko v neskončnosti, da dobimo premico v $P(\mathcal{A})$. Projektivno ravnino $P(\mathcal{A})$ smo torej dobili tako, da smo afini ravnini $\mathcal{A}$ dodali za eno premico točk, vsaki premici pa smo dodali po eno točko.

Sedaj pokažimo, da tako dobljena množica točk in premic ustreza aksiomom projektivne ravnine.

P1: Za začetek pokažimo, da skozi poljubni različni točki poteka natanko ena premica.

Recimo najprej, da sta obe točki T_1 in T_2 v afinem delu $\mathcal{A}$. Potem obstaja natanko ena premica p v $\mathcal{A}$, ki vsebuje dani točki, kar pomeni, da dani točki vsebuje tudi premica $\tilde{p}$. Hkrati pa premica p_∞ ne vsebuje danih točk, od koder sledi enoličnost.

Če sta obe točki T_1 in T_2 na p_∞ , je p_∞ edina premica, ki ju vsebuje, ker vsaka premica oblike $\tilde{p}$ vsebuje samo eno točko s p_∞ .

Za konec si pogledjmo primer, ko je $T_1 \in \mathcal{A}$ in $T_2 \in p_\infty$. Po aksiomu A2 v afini ravnini $\mathcal{A}$ obstaja natanko ena premica p , ki vsebuje točko T_1 in ima smer T_2 . Premica $\tilde{p}$ potem vsebuje točki T_1 in T_2 . Če bi obstajala še kakšna druga premica $\tilde{q}$ skozi ti dve točki, bi morala biti q vzporedna p . Po aksiomu o enoličnosti vzporednic pa od tod sledi, da je $p = q$. Jasno je tudi, da premica p_∞ ne vsebuje točke T_1 .

P2: Pokažimo sedaj, da se poljubni premici v $P(\mathcal{A})$ sekata v natanko eni točki.

Če je ena izmed njih p_∞ , druga pa $\tilde{p}$, se sekata v točki $[p]$ ki ustreza smeri premice p .

Če sta premici oblike $\tilde{p}$ in $\tilde{q}$, pa ločimo dve možnosti. Če sta p in q vzporedni v $\mathcal{A}$, je $[p] = [q]$, kar pomeni, da se $\tilde{p}$ in $\tilde{q}$ sekata v točki v neskončnosti $[p] = [q]$. Če p in q nista vzporedni, pa se sekata že v neki točki, ki leži v $\mathcal{A}$.

P3: V afini ravnini $\mathcal{A}$ lahko izberemo par vzporednih premic p_1 in p_2 ter še en par vzporednih premic q_1 in q_2 , ki nista vzporedni prvotnim premicam. Točke $p_1 \cap q_1$, $p_1 \cap q_2$, $p_2 \cap q_1$ in $p_2 \cap q_2$ potem zadoščajo aksiomu P3.

Opomba:

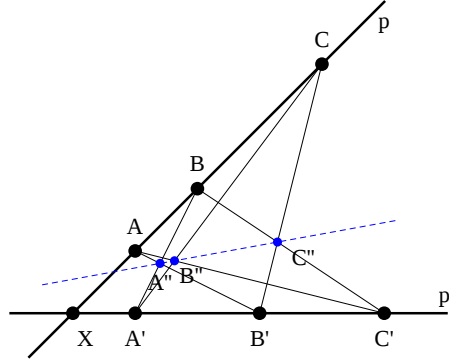
(1) Afini ravnini $\mathcal{A}$ lahko po zgornjem postopku vedno priredimo projektivno ravnino $P(\mathcal{A})$. V kolikor je $\mathcal{A} = \mathcal{O}^2$ kar koordinatna ravnina nekega obsega $\mathcal{O}$, je projektivna ravnina $P(\mathcal{A})$ izomorfna projektivni ravnini $P(\mathcal{O}^3)$, ki jo dobimo na analitični način.

(2) Iz projektivne ravnine P dobimo afino ravnino $A(P) = P \setminus \{p\}$ tako, da odstranimo poljubno premico p . Načeloma lahko pri odstranitvi različnih premic dobimo neizomorfne afine ravnine. Če je $P = P(\mathcal{O}^3)$, pa je $A(P)$ zmeraj izomorfna afini ravnini $\mathcal{O}^2$. $\square$

(5) Pokaži, da v projektivni ravnini $P(\mathbb{F}^3)$, kjer je $\mathbb{F}$ polje, velja Pappusov izrek.

Rešitev: Najprej si pogledjmo formulacijo Pappusovega izreka:

Pappusov izrek: Naj bodo $A, B, C \in p$ in $A', B', C' \in p'$ različne kolinearne točke v $P(\mathbb{F}^3)$, ki so različne tudi od točke $X = p \cap p'$. Potem so točke $A'' = BC' \cap B'C$, $B'' = AC' \cap A'C$ in $C'' = AB' \cap A'B$ kolinearne.



Pokazali bomo, da Pappusov izrek velja v vsaki projektivni ravnini nad poljem. Da si olajšamo računanje, bomo zvito izbrali koordinate v $P(\mathbb{F}^3)$. Z uporabo ustrezne projektivnosti lahko dosežemo, da velja:

$$\begin{aligned} X &= [0 : 0 : 1], \\ A &= [1 : 0 : 0], \\ A' &= [0 : 1 : 0]. \end{aligned}$$

Ta predpostavka je analog temu, da bi v evklidski ravnini izbrali, da je p vodoravna, p' pa navpična os ter da točki A in A' ustrezata enotskima smernima vektorjema.

Pri teh izbirah lahko hitro vidimo, da je premica p skozi točki X in A določena z enačbo $y = 0$. Točka $B \in p$ je torej oblike $B = [x : 0 : z]$. Če bi bil $z = 0$, bi sledilo $B = [x : 0 : 0] = [1 : 0 : 0] = A$, kar pa je v protislovju s predpostavko, da sta A in B različni točki. Zaradi lastnosti homogenih koordinat lahko torej predpostavimo, da je $z = 1$. Ko naredimo podoben sklep še za točko C , vidimo, da je:

$$\begin{aligned} B &= [b : 0 : 1], \\ C &= [c : 0 : 1] \end{aligned}$$

za neka neničelna in različna skalarja $b, c \in \mathbb{F}$. Podobno dobimo, da je premica p' določena z enačbo $x = 0$, zato obstajata različna, neničelna $b', c' \in \mathbb{F}$, da velja:

$$\begin{aligned} B' &= [0 : b' : 1], \\ C' &= [0 : c' : 1]. \end{aligned}$$

Vidimo, da smo pri tej konkretni izbiri koordinat število parametrov sistema zmanjšali na vsega skupaj 4.

Izračunajmo sedaj koordinate točk B'' , C'' in A'' . Točka B'' je po definiciji presek premic AC' in $A'C$. Preverimo lahko, da je premica AC' določena z enačbo $y = c'z$, premica $A'C$ pa z enačbo $x = cz$. Od tod sledi, da je

$$B'' = [c : c' : 1].$$

Podobno dobimo tudi, da je

$$C'' = [b : b' : 1].$$

Točka A'' je presek premic BC' in $B'C$, ki ju lahko opišemo z enačbama:

$$\begin{aligned} \frac{x}{b} + \frac{y}{c'} &= z, \\ \frac{x}{c} + \frac{y}{b'} &= z. \end{aligned}$$

Po kratkem računu od tod dobimo, da je

$$A'' = [\frac{1}{b'} - \frac{1}{c'} : \frac{1}{b} - \frac{1}{c} : \frac{1}{bb'} - \frac{1}{cc'}].$$

Sedaj moramo preveriti, da so točke A'' , B'' in C'' kolinearne, kar pa pomeni, da so njihovi smerni vektorji koplanarne točke v $\mathbb{F}^3$. Koplanarnost vektorjev najlažje preverimo z izračunom determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{b'} - \frac{1}{c'} & c & b \\ \frac{1}{b} - \frac{1}{c} & c' & b' \\ \frac{1}{bb'} - \frac{1}{cc'} & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{c'}{b'} - 1 + 1 - \frac{b}{c} + \frac{c}{b} - \frac{b'}{c'} - (\frac{c'}{b'} - \frac{b}{c} + 1 - \frac{b'}{c'} + \frac{c}{b} - 1) = 0.$$

Od tod sedaj sledi, da so točke A'' , B'' in C'' kolinearne točke v $P(\mathbb{F}^3)$.

Opomba: Definirajmo aksioma:

Desarguesov aksiom (D): Trikotnika ABC in $A'B'C'$ sta v perspektivni legi glede na točko natanko tedaj, ko sta v perspektivni legi glede na premico.

Pappusov aksiom (P): Naj bodo $A, B, C \in p$ in $A', B', C' \in p'$ različne kolinearne točke v P , ki so različne tudi od točke $X = p \cap p'$. Potem so točke $A'' = BC' \cap B'C$, $B'' = AC' \cap A'C$ in $C'' = AB' \cap A'B$ kolinearne.

Potem za poljubno aksiomatsko projektivno ravnino velja:

- (1) Projektivna ravnina P je izomorfná projektivni ravnini oblike $P(\mathcal{O}^3)$ za nek obseg $\mathcal{O}$ natanko takrat, ko P zadošča aksiomom $P1$, $P2$, $P3$ in D .
- (2) Projektivna ravnina P je izomorfná projektivni ravnini oblike $P(\mathbb{F}^3)$ za neko polje $\mathbb{F}$ natanko takrat, ko P zadošča aksiomom $P1$, $P2$, $P3$ in P .
- (3) V vsaki projektivni ravnini Pappusov aksiom implicira Desarguesov aksiom. Tej trditvi rečemo Hessenbergov izrek. $\square$