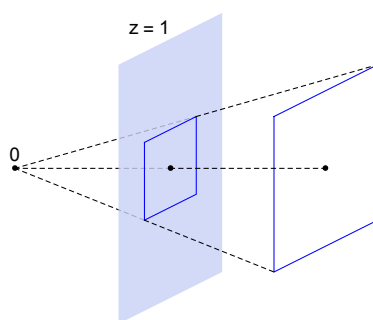


Afina in projektivna geometrija

Kolineacije in projektivnosti

- (1) S fotoaparatom napravimo posnetek, na katerem vidimo kvadrat z oglišči $A(-1, 0)$, $B(0, 0)$, $C(0, 1)$ in $D(-1, 1)$. Nato fotoaparatus obrnemo za kot $\frac{\pi}{4}$ v levo in spet fotografiramo. Kaj vidimo na novem posnetku?

Rešitev: Pri tej nalogi bomo izračunali, kako se spremeni slika objekta, če zasučemo fotoaparatus. Da bo računanje bolj preprosto, si bomo pogledali zasuk za kot $\frac{\pi}{4}$, isti postopek pa lahko uporabimo tudi pri poljubnem zasuku fotoaparata.



(1) Zveza med koordinatnima sistemoma:

Najprej bomo izpeljali zvezo med koordinatami v obeh koordinatnih sistemih. Z (x, y, z) bomo označili koordinate točke glede na začetni položaj fotoaparata, z (x', y', z') pa glede na zasukan položaj. Zvezo med koordinatami (x, y, z) in (x', y', z') pri zasuku za kot ϕ lahko podamo v obliki

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Če izberemo kot $\phi = \frac{\pi}{4}$, tako dobimo zvezo:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\sqrt{2}}{2} (x + z), \\ y' &= y, \\ z' &= \frac{\sqrt{2}}{2} (-x + z). \end{aligned}$$

(2) Izračun predpisa preslikave med slikama:

Iskani predpis bomo izračunali v naslednjih korakih:

- Recimo, da danemu objektu v prostoru ustreza točka (x, y) na prvi sliki.
- Od tod sledi, da objekt leži v smeri $(x, y, 1)$ glede na začetno orientacijo fotoaparata.
- Ko fotoaparatus zasučemo, leži objekt v smeri

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} (x + 1) \\ y \\ \frac{\sqrt{2}}{2} (-x + 1) \end{bmatrix}$$

glede na zasukan fotoaparatus.

· Na drugi sliki objektu torej pripada točka (x', y') s koordinatama

$$x' = \frac{1+x}{1-x},$$

$$y' = \frac{\sqrt{2}y}{1-x}.$$

Tako dobimo predpis za preslikavo, ki transformira slike iz začetnega v končni položaj

$$\Phi(x, y) = \left(\frac{1+x}{1-x}, \frac{\sqrt{2}y}{1-x} \right).$$

Na preslikavo Φ lahko gledamo kot na preslikavo iz $\mathbb{R}^2$ v $\mathbb{R}^2$, ki ni definirana na premici $x = 1$. Bolj naravno pa jo je obravnavati kot preslikavo iz $P(\mathbb{R}^3)$ v $P(\mathbb{R}^3)$. Vidimo, da sta njeni komponenti ulomljeni linearni preslikavi. V nadaljevanju poglavja bomo videli, da je naša preslikava poseben primer projektivnosti.

Oglišča kvadrata se preslikajo takole:

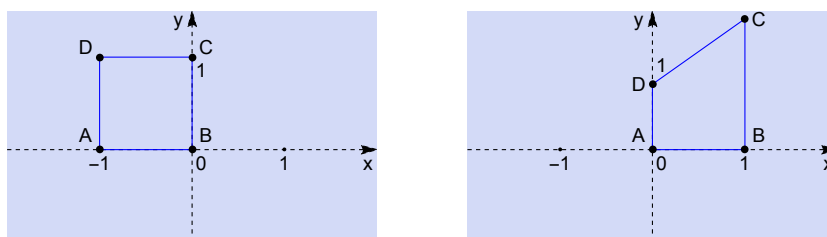
$$A' = \Phi(A) = (0, 0),$$

$$B' = \Phi(B) = (1, 0),$$

$$C' = \Phi(C) = (1, \sqrt{2}),$$

$$D' = \Phi(D) = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Vidimo, da se kvadrat na prvotni sliki preslika v trapez na novi sliki.



Razlog je v tem, da po vrtenju fotoaparata v levo zgornja in spodnja stranica kvadrata nista več vzporedni ravnini fotoaparata. Zato se nam na sliki zdi, da se njuni nosilki sekata v neki točki na obzorju. $\square$

- (2) V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ je dano standardno projektivno ogrodje $X_0 = [1 : 1 : 1]$, $X_1 = [1 : 0 : 0]$, $X_2 = [0 : 1 : 0]$ in $X_3 = [0 : 0 : 1]$.

(a) Poišči predpis za projektivnost $\theta_A : P(\mathbb{R}^3) \rightarrow P(\mathbb{R}^3)$, ki je določena s pogoji:

$$\theta_A(X_0) = [1 : 1 : 1],$$

$$\theta_A(X_1) = [1 : 0 : 0],$$

$$\theta_A(X_2) = [1 : 1 : 0],$$

$$\theta_A(X_3) = [1 : 0 : 1].$$

(b) Ugotovi, kam θ_A preslika premico $p_\infty = \{[x : y : z] \mid z = 0\}$ in afini del $z = 1$.

Rešitev: Kolineacije in projektivnosti imajo v projektivni geometriji analogno vlogo, kot jo imajo izometrije v evklidski geometriji. Bijektivni preslikavi

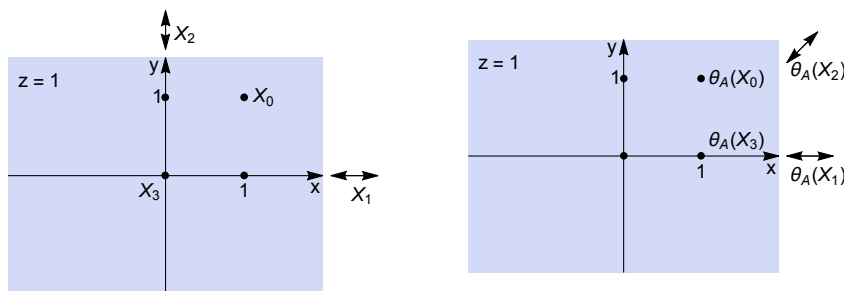
$$\theta : P(\mathcal{O}^n) \rightarrow P(\mathcal{O}^n)$$

med projektivnima prostoroma nad obsegom $\mathcal{O}$ rečemo *kolineacija*, če slika kolinearne točke v kolinearne točke. Po osnovnem izreku projektivne geometrije zmeraj obstaja obrnljiva semilinearna preslikava $M : \mathcal{O}^n \rightarrow \mathcal{O}^n$, da velja

$$\theta(X) = MX$$

za vsako točko $X \in P(\mathcal{O}^n)$. V tem primeru pišemo $\theta = \theta_M$. Preslikava M je določena do neničelnega skalarja natančno. Če je $M = A$ linearna preslikava, rečemo kolineaciji θ_A *projektivnost*. Nad obsegi $\{\mathbb{F}_p, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ je vsaka kolineacija tudi projektivnost, nad obsegom $\mathbb{C}$ pa obstajajo kolineacije, ki niso projektivnosti.

(a) Podobno kot je vsaka linearna preslikava $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ natanko določena s slikami baznih vektorjev $\mathbb{R}^3$, je vsaka projektivnost $\theta_A : P(\mathbb{R}^3) \rightarrow P(\mathbb{R}^3)$ natanko določena s slikami standardnega projektivnega ogrodja. Te slike morajo spet tvoriti neko projektivno ogrodje $P(\mathbb{R}^3)$, kar z drugimi besedami pomeni, da nobena trojica od teh štirih točk ni kolinearna. Kot vidimo na spodnji sliki, je v našem primeru temu pogoju zadoščeno.



Pišimo

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Pogoji:

$$\begin{aligned} \theta_A(X_0) &= [1 : 1 : 1], \\ \theta_A(X_1) &= [1 : 0 : 0], \\ \theta_A(X_2) &= [1 : 1 : 0], \\ \theta_A(X_3) &= [1 : 0 : 1] \end{aligned}$$

nam določajo sistem linearnih enačb za koeficiente matrike A .

$$\theta_A([1 : 1 : 1]) = [1 : 1 : 1]:$$

Ta pogoj nam da

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

oziroma

$$\begin{aligned}a + b + c &= \alpha, \\d + e + f &= \alpha, \\g + h + i &= \alpha.\end{aligned}$$

$$\underline{\theta_A([1 : 0 : 0]) = [1 : 0 : 0]}:$$

Sedaj je

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

oziroma

$$\begin{aligned}a &= \beta, \\d &= 0, \\g &= 0.\end{aligned}$$

$$\underline{\theta_A([0 : 1 : 0]) = [1 : 1 : 0]}:$$

Tokrat imamo

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

oziroma

$$\begin{aligned}b &= \gamma, \\e &= \gamma, \\h &= 0.\end{aligned}$$

$$\underline{\theta_A([0 : 0 : 1]) = [1 : 0 : 1]}:$$

V tem primeru je

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

oziroma

$$\begin{aligned}c &= \delta, \\f &= 0, \\i &= \delta.\end{aligned}$$

Iz teh pogojev najprej razberemo, da je $d = f = g = h = 0$. Nadalje je $c = i$ in $b = e$. Ko to vstavimo v sistem:

$$\begin{aligned}a + b + c &= \alpha, \\d + e + f &= \alpha, \\g + h + i &= \alpha,\end{aligned}$$

dobimo, da je $b = c = e = i = -a = \alpha$. Ker je matrika A določena le do skalarja natančno, lahko na primer vzamemo $\alpha = 1$, da dobimo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

od koder sledi

$$\theta_A([x : y : z]) = [-x + y + z : y : z].$$

(b) Premica $p_\infty = \{[x : y : z] \mid z = 0\}$ je premica skozi točki X_1 in X_2 , zato je $\theta_A(p)$ premica skozi sliki teh dveh točk. Računsko ali pa grafično lahko preverimo, da je

$$\theta_A(p_\infty) = p_\infty.$$

Na afinem delu $z = 1$ pa dobimo preslikavo

$$\theta_A([x : y : 1]) = [-x + y + 1 : y : 1].$$

Vidimo, da je zožitev projektivnosti θ_A na afino ravnino $z = 1$ afina transformacija s predpisom

$$\tau(x, y) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

□

(3) Opiši vložitev grupe afinih transformacij $\mathbb{R}^2$ v grupo projektivnosti $P(\mathbb{R}^3)$.

Rešitev: Naj bo $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ afina transformacija s predpisom $\tau(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$. Definirajmo matriko

$$\iota(\tau) = \begin{bmatrix} A & \vec{b} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ker je matrika A obrnljiva, je tudi matrika $\iota(\tau)$ obrnljiva matrika velikosti 3×3 . Pokazali bomo, da je tako dobljena preslikava

$$\iota : \text{Aff}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \text{PGL}(\mathbb{R}^3)$$

homomorfizem iz grupe afinih transformacij $\mathbb{R}^2$ v grupo projektivnosti $P(\mathbb{R}^3)$.

Če pišemo $\tau_1(\vec{x}) = A_1\vec{x} + \vec{b}_1$ in $\tau_2(\vec{x}) = A_2\vec{x} + \vec{b}_2$, je

$$(\tau_2 \circ \tau_1)(\vec{x}) = \tau_2(A_1\vec{x} + \vec{b}_1) = A_2(A_1\vec{x} + \vec{b}_1) + \vec{b}_2 = A_2A_1\vec{x} + A_2\vec{b}_1 + \vec{b}_2,$$

od koder dobimo

$$\iota(\tau_2 \circ \tau_1) = \begin{bmatrix} A_1A_2 & A_2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Po drugi strani pa je

$$\iota(\tau_2)\iota(\tau_1) = \begin{bmatrix} A_2 & \vec{b}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & \vec{b}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1A_2 & A_2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Torej je res $\iota(\tau_2 \circ \tau_1) = \iota(\tau_2)\iota(\tau_1)$.

Opis projektivnosti oblike $\theta = \iota(\tau)$:

Recimo, da je $\theta = \iota(\tau)$, kjer je $\tau(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$. Točko $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ lahko enačimo s točko $[x : y : 1]$ na afinem delu $P(\mathbb{R}^3)$. Potem velja

$$\theta([x : y : 1]) = \begin{bmatrix} A & \vec{b} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{x} + \vec{b} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

kar pomeni, da θ preslika afini del nazaj nase in da se zožitev θ na afini del ujema z afino transformacijo τ . V tem smislu lahko razumemo projektivnost $\theta = \iota(\tau)$ kot razširitev afine transformacije τ . Poglejmo si še, kako θ deluje na premici v neskončnosti. Poljubna točka na p_∞ je oblike $[x : y : 0]$. Potem velja

$$\theta([x : y : 0]) = \begin{bmatrix} A & \vec{b} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{x} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Delovanje θ na premici p_∞ je torej določeno z matriko A . Da dobimo boljši občutek, si pogledimo nekaj konkretnih primerov.

- (1) Če je τ rotacija za kot ϕ , deluje θ na p_∞ tako, da smeri zarotira za kot ϕ .
- (2) Če je τ dilatacija (translacija ali središčni razteg), θ fiksira vse točke na p_∞ .
- (3) Če je τ zrcaljenje čez premico $y = 0$, sta $[1 : 0 : 0]$ in $[0 : 1 : 0]$ fiksni točki θ . Vendar pa velja, $\theta([1 : 1 : 0]) = [1 : -1 : 0]$. Ta primer nam nazorno pokaže, da projektivnost dane premice ni natanko določena s slikama dveh različnih točk, kot to velja za afine transformacije afine premice.

Projektivnosti, ki so v sliki preslikave ι , lahko geometrično karakteriziramo kot tiste projektivnosti, ki preslikajo premico v neskončnosti nazaj nase. Posledično preslikajo takšne projektivnosti tudi afini del nazaj nase, njihova zožitev na afini del pa določa neko afino transformacijo. $\square$

- (4) Projektivnost $\theta : P(\mathbb{R}^3) \rightarrow P(\mathbb{R}^3)$ je dana s predpisom $\theta([x : y : z]) = [x : y : x + z]$.
 - (a) Izračunaj $\theta^{-1}(p_\infty)$ in $\theta(p_\infty)$, kjer je $p_\infty = \{[x : y : z] \mid z = 0\}$.
 - (b) Opiši, kam θ preslika šopa premic skozi točki $[0 : 1 : 0]$ in $[1 : 0 : 0]$.

Rešitev: (a) Zožitev projektivnosti θ na afini del $z = 1$ ima predpis

$$\theta(x, y) = \left(\frac{x}{x+1}, \frac{y}{x+1} \right).$$

Od tod lahko sklepamo, da se premica p , ki ima na afinem delu enačbo $x = -1$, sicer pa enačbo $x + z = 0$, preslika na premico v neskončnosti. Torej je $\theta^{-1}(p_\infty) = p$.

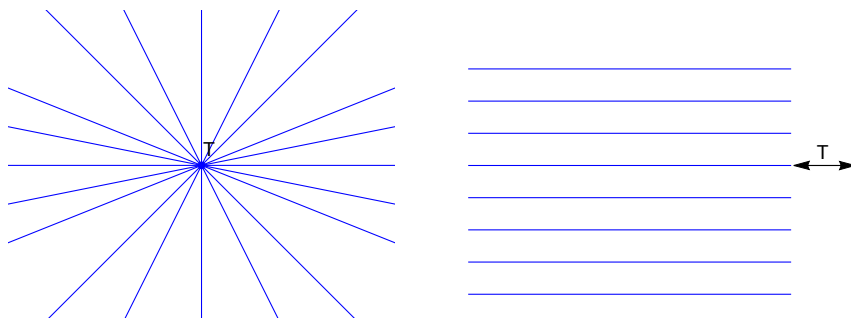
Poglejmo sedaj, kam se preslikajo točke na p_∞ . Vsaka točka $T \in p_\infty$ je oblike $T = [1 : k : 0]$ za nek $k \in \mathbb{R}$ ali pa $T = [0 : 1 : 0]$. Za te točke velja:

$$\begin{aligned} \theta([1 : k : 0]) &= [1 : k : 1], \\ \theta([0 : 1 : 0]) &= [0 : 1 : 0], \end{aligned}$$

kar pomeni, da je $\theta(p_\infty)$ premica z enačbo $x - z = 0$.

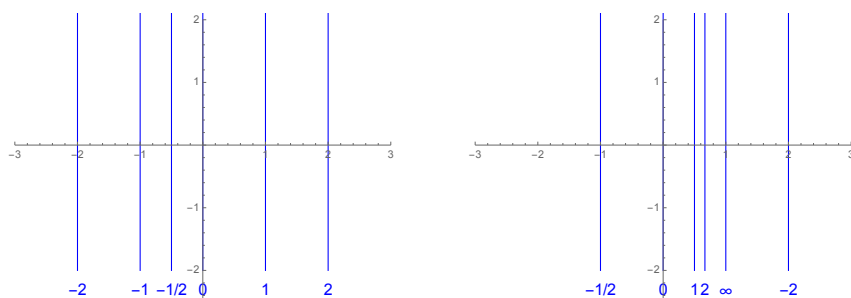
(b) Šop premic skozi točko T v $P(\mathbb{R}^3)$ je množica vseh premic, ki vsebujejo točko T . Glede na to, ali leži T na afinem delu oziroma v neskončnosti, ločimo dva primera. Če je T točka

v afinem delu projektivne ravnine, dobimo na afinem delu levo sliko, kot smo navajeni. Če pa je T točka v neskončnosti, ki ustreza neki smeri, pa dobimo na afinem delu družino vseh vzporednic v dani smeri.



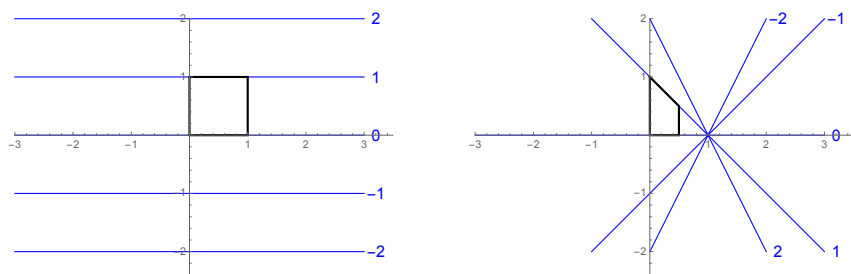
Šop premic skozi točko $[0 : 1 : 0]$:

Šop premic skozi točko $[0 : 1 : 0]$ si lahko na afinem delu predstavljamo kot družino vseh navpičnih premic. Ker je $\theta([0 : 1 : 0]) = [0 : 1 : 0]$, se vsaka navpičnica preslika bodisi v navpičnico ali pa na premico v neskončnosti. Premice v tem šopu lahko parametriziramo s parametrom $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, ki pove, kje dana premica seka premico $y = 0$. Projektivnost θ preslika premico s parametrom x v premico s parametrom $\frac{x}{x+1}$. Premica s parametrom $x = -1$ se preslika na premico v neskončnosti, premica v neskončnosti pa na premico s parametrom $x = 1$.



Šop premic skozi točko $[1 : 0 : 0]$:

Šop premic skozi točko $[1 : 0 : 0]$ si lahko na afinem delu predstavljamo kot družino vseh vodoravnih premic. Tokrat je $\theta([1 : 0 : 0]) = [1 : 0 : 1]$, kar pomeni, da slike vseh vodoravnih potekajo skozi točko $[1 : 0 : 1]$, ki jo lahko razumemo kot 'točko na obzorju' za vodoravne premice.



Opomba: Projektivnosti, ki so inducirane z matrikami oblike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix},$$

kjer sta $a, b \in \mathbb{R}$, tvorijo podgrupo, ki je izomorfná abelovi grupi $\mathbb{R}^2$. Projektivnost θ_A preslika premico $ax + by + z = 0$ na premico p_∞ , premico p_∞ pa na premico $ax + by - z = 0$. Točke na premici $ax + by = 0$ so fiksne točke θ_A , vsako premico skozi točko $[0 : 0 : 1]$ pa θ_A preslika nazaj nase. Projektivnosti θ_A rečemo *centralna kolineacija* s centrom $[0 : 0 : 1]$ in osjo $ax + by = 0$.

V našem primeru je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

kar pomeni, da gre za centralno kolineacijo z osjo $x = 0$ in centrom $[0 : 0 : 1]$. $\square$

(5) V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ sta dani premici:

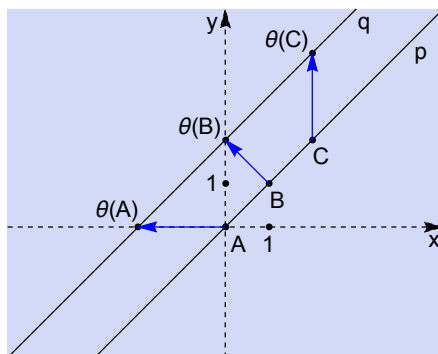
$$p = \{[x : y : z] \mid x - y = 0\},$$

$$q = \{[x : y : z] \mid x - y + 2z = 0\}.$$

(a) Poišči predpis za projektivnost $\theta : p \rightarrow q$, za katero je $\theta([0 : 0 : 1]) = [-2 : 0 : 1]$, $\theta([1 : 1 : 1]) = [0 : 4 : 2]$ in $\theta([2 : 2 : 1]) = [2 : 4 : 1]$.

(b) Ugotovi, ali je θ perspektivnost. Če je, poišči njen center.

Rešitev: (a) Spoznali smo že, kako se opiše projektivnost projektivne ravnine $P(\mathbb{R}^3)$ nazaj nase, pri tej nalogi pa imamo dve projektivni premici, ki ležita v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$. Vemo, kam se preslikajo točke $A = [0 : 0 : 1]$, $B = [1 : 1 : 1]$ in $C = [2 : 2 : 1]$.

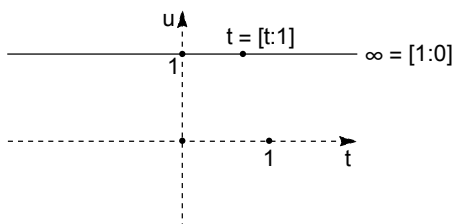


Ker tvorijo te tri točke projektivno ogrodje premice p , je projektivnost $\theta : p \rightarrow q$ natanko določena z njihovimi slikami. Če hočemo izračunati predpis za θ , pa moramo premici p in q najprej parametrizirati.

Parametrizacija projektivne premice $p \subset P(\mathbb{R}^n)$ je projektivnost

$$i_p : P(\mathbb{R}^2) \rightarrow p,$$

kjer je $P(\mathbb{R}^2)$ standardna projektivna premica. Izbira parametrizacije projektivne premice je analogna izbiri baze vektorskega prostora.



Parametrizacija premice p :

Vzamemo lahko parametrizacijo $i_p : P(\mathbb{R}^2) \rightarrow p$, ki je podana s predpisom:

$$i_p([t : u]) = [t : t : u].$$

Parameter t se preslika v točko (t, t) na afinem delu, točka v neskončnosti $[1 : 0] \in P(\mathbb{R}^2)$ pa se preslika v točko $[1 : 1 : 0] \in p_\infty$, ki ustreza smeri premice p .

Parametrizacija premice q :

Tokrat bomo vzeli parametrizacijo $i_q : P(\mathbb{R}^2) \rightarrow q$, ki je podana s predpisom:

$$i_q([t : u]) = [t : t + 2u : u].$$

Parameter t se sedaj preslika v točko $(t, t + 2)$ na afinem delu, točka v neskončnosti pa se spet preslika v točko $[1 : 1 : 0] \in p_\infty$.

Sedaj, ko imamo premici p in q parametrizirani, bomo zapisali predpis za projektivnost θ v teh parametrizacijah. Ta predpis bomo označili s θ_A . Pogoji $\theta([0 : 0 : 1]) = [-2 : 0 : 1]$, $\theta([1 : 1 : 1]) = [0 : 4 : 2]$ in $\theta([2 : 2 : 1]) = [2 : 4 : 1]$ se prevedejo v pogoje:

$$\begin{aligned}\theta_A([0 : 1]) &= [-2 : 1], \\ \theta_A([1 : 1]) &= [0 : 1], \\ \theta_A([2 : 1]) &= [2 : 1].\end{aligned}$$

$$\underline{\theta_A([0 : 1]) = [-2 : 1]:}$$

Ta pogoj nam da

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

oziroma

$$\begin{aligned}b &= -2\alpha, \\ d &= \alpha.\end{aligned}$$

Od tod dobimo zvezo $b = -2d$.

$$\underline{\theta_A([1 : 1]) = [0 : 1]:}$$

Sedaj je

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

oziroma

$$\begin{aligned}a + b &= 0, \\ c + d &= \beta.\end{aligned}$$

Od tod dobimo zvezo $a = -b$.

$$\underline{\theta_A([2 : 1]) = [2 : 1]:}$$

Tokrat imamo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

oziroma

$$\begin{aligned} 2a + b &= 2\gamma, \\ 2c + d &= \gamma. \end{aligned}$$

Od tod dobimo zvezo $2a + b = 4c + 2d$. Z upoštevanjem zvez $a = -b = 2d$, od tod sledi $c = 0$. Če izberemo $d = 1$, pa dobimo matriko

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Od tod dobimo predpis

$$\theta_A([t : u]) = [2t - 2u : u],$$

ki ga lahko na afinem delu zapišemo v obliki

$$\theta(t) = 2t - 2.$$

V homogenih koordinatah na $P(\mathbb{R}^3)$ pa dobimo

$$\theta([t : t : u]) = [2t - 2u : 2t : u].$$

(b) Naj bosta p in q različni premici v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ in O točka, ki ne leži na p oziroma q . *Perspektivnost* s premice p na premico q s centrom O je preslikava $\theta : p \rightarrow q$, ki točki $T \in p$ priredi presečišče premice OT in premice q .

Projektivnost $\theta : p \rightarrow q$ je perspektivnost natanko takrat, ko ohranja presečišče premic p in q . V tem primeru je $O = T\theta(T) \cap U\theta(U)$ za poljubni različni točki $T, U \in p$, ki sta različni od $p \cap q$.

V našem primeru je presečišče premic p in q točka $T = [1 : 1 : 0]$, zanjo pa velja

$$\theta([1 : 1 : 0]) = [2 : 2 : 0] = [1 : 1 : 0],$$

od koder sledi, da je θ perspektivnost.

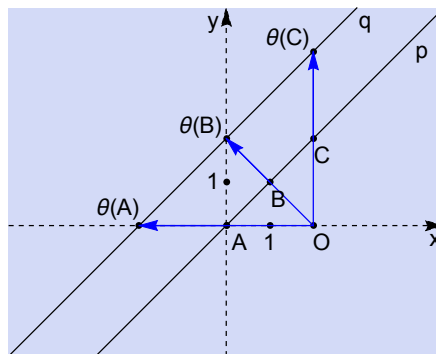
Za izračun centra perspektivnosti najprej izberimo točko $A = [0 : 0 : 1]$. Potem je $\theta(A) = [-2 : 0 : 1]$, premica skozi A in $\theta(A)$ pa ima enačbo

$$\overline{A\theta(A)} = \{[x : y : z] \mid y = 0\}.$$

Kot drugo točko si lahko izberemo točko $C = [2 : 2 : 1]$. Sedaj je $\theta(C) = [2 : 4 : 1]$ in

$$\overline{C\theta(C)} = \{[x : y : z] \mid x - 2z = 0\}.$$

Presek teh dveh premic je točka $O = [2 : 0 : 1]$.



□