

III. Izreki Koebeja, Landana in Picarda.

Glavni cilj tega poglavja je dokazati naslednji "mali Picardov izrek":

IZREK. Cela funkcija $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, katere zaloga vrednosti $f(\mathbb{C})$ ne vsebuje vsej dveh števil, je konstantna.

Drugeče povedano: če sta $a \neq b$ kompleksni števili in je $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ holomorfná fu., potem je f konstanta.

Seveda pa $f(\mathbb{C})$ lahko izpusti eno vrednost, Andi f ni konstantna. Npr., $e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$.

III.1. Diferencialne forme v ravnini.

Naj bo $\Omega \subset \mathbb{C}$ domena. ~~Dom~~

Diferencialna 1-forma na Ω je izraz oblike

$$\omega = f dz + g d\bar{z},$$

kjer sta $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ funkciji na Ω . Vselej bomo privzeli, da sta $f, g \in \mathcal{C}^1(\Omega)$.

Zgornjo 1-formo lahko zapišemo tudi v realnih koordinatah: $z = x + iy$
 $dz = dx + i dy; \quad d\bar{z} = dx - i dy$

$$\begin{aligned}\alpha &= f(dx+idy) + g(dx-idy) \\ &= (f+g) \cdot dx + i(f-g)dy.\end{aligned}$$

Klineasti (alternirajoči) produkt $\wedge$:

$$dz \wedge dz = 0, \quad d\bar{z} \wedge d\bar{z} = 0$$

$$dz \wedge d\bar{z} = -d\bar{z} \wedge dz.$$

Poleg tega zahtevamo, da je $\wedge$ bi-linearen. Dobimo:

$$\begin{aligned}(f dz + g d\bar{z}) \wedge (h dz + k d\bar{z}) &= \\ &= (f \cdot k + g h) dz \wedge d\bar{z}\end{aligned}$$

Izraz oblike

$\beta = b \cdot dz \wedge d\bar{z}$, $b: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ funkcija,
se imenuje diferencialna 2-forma na Ω .

Rešni zapis 2-forme:

$$\begin{aligned}dz \wedge d\bar{z} &= (dx+idy) \wedge (dx-idy) \\ &= -2i dx \wedge dy\end{aligned}$$

$$\boxed{dx \wedge dy = \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}} \leftarrow \text{ploščinska 2-forma}$$

Če je $A \subset \mathbb{C}$ kompaktna množica z "lepmi" robom ∂A (npr., če ima ∂A volumen 0), je

$$pl(A) = \iint_A dx \wedge dy = \frac{i}{2} \iint_A dz \wedge d\bar{z}$$

Vnangji diferencial d: f funkcija

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \quad \dots \text{ v kompleksnem zapisu} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad \dots \text{ v realnem zapisu} \end{aligned}$$

$$\alpha = f dz + g d\bar{z} \quad \dots \text{ 1-forma}$$

$$\begin{aligned} d\alpha &\stackrel{\text{def}}{=} df \wedge dz + dg \wedge d\bar{z} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz + \frac{\partial g}{\partial z} dz \wedge d\bar{z} \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z} \end{aligned}$$

V realnem zapisu:

$$\begin{aligned} \alpha &= P dx + Q dy \\ \Rightarrow d\alpha &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

Greenova formula (poseben primer Stokesove f.):

$D \subset \mathbb{C}$ območje z odsekoma C^1 -robom ∂D ;
 $\alpha = f dz + g d\bar{z} \quad \dots$ 1-forma razreda $C^1(D)$.

$$\Rightarrow \int_{\partial D} \alpha = \iint_D d\alpha$$

Posoben primer: $\alpha = \bar{z} \cdot dz$

$$d\alpha = d\bar{z} \wedge dz = 2i dx \wedge dy$$

$$\begin{aligned} pl(D) &= \iint_D dx \wedge dy = \\ &= \frac{1}{2i} \iint_D d\bar{z} \wedge dz = \frac{1}{2i} \iint_D d(\bar{z} dz) \\ &= \frac{1}{2i} \oint_{\partial D} \bar{z} dz \end{aligned}$$

Povlek (pullback) diferencialne forme:

$$f = f_1 + i f_2 : D \rightarrow \mathbb{C} \quad \mathbb{C}^1\text{-preslikava.}$$

$$(a) \quad \alpha = \text{funkcija na } f(D) \Rightarrow f^*(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \circ f$$

$$(b) \quad \alpha = a \cdot dz + b \cdot d\bar{z} \quad \dots \text{ 1-forma na } f(D)$$

$$\Rightarrow f^*\alpha = (a \circ f) \cdot df + (b \circ f) \cdot d\bar{f}$$

V realnem zapisu:

$$\alpha = \tilde{a} dx + \tilde{b} dy$$

$$f^*\alpha = (\tilde{a} \circ f) \cdot df_1 + (\tilde{b} \circ f) \cdot df_2$$

Posoben primer: f holomorfná, $\alpha = a \cdot dz$

$$f^*(a dz) = (a \circ f) \cdot df$$

$$\text{tj.} \quad = a(f(z)) \cdot f'(z) dz$$

(c) $\alpha = a dz \wedge d\bar{z}$ -- 2 forma

$$f^* \alpha = (a \circ f) df \wedge d\bar{f}$$

Poseben primer: $\alpha = a \cdot dz \wedge d\bar{z}$

f holomorfna

$$\Rightarrow f^* \alpha = (a \circ f) \cdot df \wedge d\bar{f}$$

$$= (a \circ f) \cdot f'(z) dz \wedge \overline{f'(z)} \cdot d\bar{z}$$

$$= (a \circ f) \cdot |f'(z)|^2 \cdot dz \wedge d\bar{z}.$$

Trditev: operaciji $*$ (povlek) in d (vnanjski odvod) komutirata:

$$d(f^* \alpha) = f^*(d\alpha).$$

Dokaz: domača naloga.

Trditev: operaciji $*$ in $\wedge$ komutirata:

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^* \alpha \wedge f^* \beta.$$

Trditev $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$

-3.6-

Krivolinijsni integral 1-forme:

$$\alpha = a \cdot dz + b \cdot d\bar{z}$$

$$\gamma: [0, 1] \ni t \rightarrow \gamma(t) \in \mathbb{C} \quad \begin{array}{l} \text{odsekoma} \\ \mathcal{C}^1\text{-pot} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \alpha &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 \left(a(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) + b(\gamma(t)) \cdot \overline{\gamma'(t)} \right) dt \\ &= \int_0^1 \gamma^* \alpha \end{aligned}$$

Posoben primer: $\int_{\gamma} a dz = \int_0^1 a(\gamma(t)) \gamma'(t) \cdot dt.$

Ploskovni integral 2-forme:

$$\iint_D a \cdot dx \wedge dy \stackrel{\text{def}}{=} \iint_D a(x, y) dx \cdot dy.$$

obrčeni Riemannov integral

$$\iint_D a \cdot dz \wedge d\bar{z} = -2i \iint_D a \cdot dx \wedge dy = -2i \iint_D a \cdot dx \cdot dy.$$

Ploščina D:

$$\begin{aligned} \text{pl}(D) &= \iint_D dx \wedge dy = \frac{i}{2} \iint_D dz \wedge d\bar{z} \\ &= \frac{1}{2i} \oint_{\partial D} \bar{z} \cdot dz \end{aligned}$$

Transformacija integralov:

1° krivuljni integral:

$\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ pot razrede $\mathcal{C}^1$

f difeomorfizem $\underbrace{\gamma([0,1])}_C \rightarrow f(C) \subset \mathbb{C}$

ω diferencialna 1-forma na skedici $f(C)$.

Tedaj velja
$$\int_{\gamma} f^* \omega = \int_{f \circ \gamma} \omega$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f^* \omega &= \int_0^1 \gamma^* (f^* \omega) = \\ &= \int_0^1 (f \circ \gamma)^* \omega = \int_{f \circ \gamma} \omega \end{aligned}$$

2° Plaskovni integral:

$f: \overline{D} \rightarrow f(\overline{D})$ difeomorfizem

ω 2-forma na $f(\overline{D})$.

Tedaj velja:

$$\iint_{f(D)} \omega = \iint_D f^* \omega$$

To sledi iz formule za zamenjavo spremenljivk v dvojnem integralu:

$$\iint_{f(D)} a \cdot du \cdot dv = \iint_D (a \circ f) \cdot |Jf| \cdot dx \cdot dy.$$

Trditiv. Naj bo $C = \partial D$ sklenjena odsekoma C' krivulja v $\mathbb{C}$ in f bihodomorfna presliheva na neki skolici C v $\mathbb{C}$. Omejitno $C' = f(C)$ in naj bo D' območje, omejeno s C' .

Tedaj velja

$$pl(D') = \frac{1}{2i} \oint_C f'(z) \cdot \overline{f(z)} \cdot dz$$

Očrta : $pl(D') = \frac{1}{2i} \oint_{\partial D'} \bar{w} \cdot dw$ (glej str. 3.6)

$$= \frac{1}{2i} \oint_{\partial D} f^* (\bar{w} \cdot dw) \quad (\text{stran 3.7})$$

$$= \frac{1}{2i} \oint_C \overline{f(z)} \cdot d f(z)$$

$$= \frac{1}{2i} \oint_C f'(z) \cdot \overline{f(z)} \cdot dz$$

III.2. Razred $\mathcal{S}$

Označimo z $\mathcal{S}$ množico vseh holomorfnih funkcij $f: \mathbb{D} = \{|z| < 1\} \rightarrow \mathbb{C}$, ki so injektivne in zadoščajo $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

Opomba: $\mathcal{S} = \text{Schlicht}$ (= nemško: injektivna)

Taylorjev razvoj $f \in \mathcal{S}$:

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

Dolgo neresen problem je bila Schreibachova domneva:

$$|a_n| \leq n, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

To domnevo je leta 1984 dokazal Louis de Branges.

Mi bomo dokazali, da je $\mathcal{S}$ normalna družina. Po Hurwitzovem izreku je

$\mathcal{S}$ zaprta v $\mathcal{H}(\mathbb{D})$: Če ima normalna limita $f = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j$ funkcij $f_j \in \mathcal{S}$ je

bodisi injektivna bodisi konstantna; toda

očitno $f(z) = z + \dots$ vsakega reda, torej

$f \in \mathcal{S}$, zato je $\mathcal{S} = \mathcal{S}$.

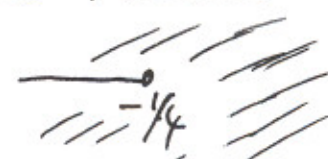
Dalje bo sledilo, da je $\bar{f} = \overline{f}$ hampelstna.

Primer: funkcija

$$f(z) = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$$

$$= \frac{z}{(1-z)^2} \quad (\text{Koebejeva funkcija})$$

pripada $\mathcal{S}$; dejansko je f konformna preslikava diska $\mathbb{D}$ na zarezano ravnino

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x+iy \mid x \leq -1/4\}.$$


Konstrukcija:

$$g: \mathbb{D} \rightarrow \{x+iy \mid x > 0\}, \quad g(z) = \frac{1+z}{1-z}.$$

$$g(0) = 1, \quad g'(0) = 2.$$

$z \mapsto g(z)^2$ konformno preslika $\mathbb{D}$ na



Sedaj:
$$f(z) = \frac{1}{4} (g(z)^2 - 1)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1+2z+z^2 - (1-2z+z^2)}{(1-z)^2}$$

$$= \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$= z (1+z+z^2+\dots)^2$$

$$= z + 2z^2 + 3z^3 + \dots$$

Trditev: Za vsako $f \in \mathcal{F}$ velja:

$$|a_2| \stackrel{!}{=} \left| \frac{f''(0)}{2} \right| \leq 2 \quad (\text{Bieberbach})$$

~1916

Dokaz. $A \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$. 

Vsaki funkciji $f \in \mathcal{F}$ priredimo funkcijo

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{f\left(\frac{1}{z^2}\right)}}; \quad z \in A.$$

Lemma: g je dobro definirana, injektivna, holomorfnna na A . Njen Laurentov razvoj je:

$$g(z) = z - \frac{a_2}{2} \cdot \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Dokaz. $z \in A \Leftrightarrow w = \frac{1}{z} \in \mathbb{D}$.

$$f\left(\frac{1}{z^2}\right) = f(w^2) = w^2 + a_2 w^4 + a_3 w^6 + \dots$$

$$= w^2 \cdot \underbrace{\left(1 + a_2 w^2 + a_3 w^4 + \dots\right)}$$

holomorfnna in brez ničel
na $\mathbb{D}$, saj je $f(0) = 0$ in
 f injektivna.

Torej obstaja kvadratni koren (holomorfn):

$$h(w) = \sqrt{f(w^2)} = w \cdot \sqrt{1 + a_2 w^2 + \dots}$$

$$= w \cdot \left(1 + \frac{a_2}{2} w^2 + O(w^4)\right).$$

$$= w + \frac{a_2}{2} w^3 + \dots$$

Trdimo, da je h injektivna na $\mathbb{D}$:

$$h(w_1) = h(w_2) \Rightarrow f(w_1^2) = f(w_2^2)$$

$$\Rightarrow w_1^2 = w_2^2$$

(f injektivna)

$$\Rightarrow w_1 = \pm w_2.$$

Recimo, $w_2 = -w_1$.

Iz def. in Taylorovega razvoja h sledi, da je
 h liha ~~fu~~: $h(w_1) = -h(-w_1)$.

Ker je tudi $h(w_1) = h(w_2) = h(-w_1)$, sledi:

$$h(w_1) = 0 \Rightarrow w_1 = w_2 = 0. \text{ Torej } h \text{ injektivna}$$

Odtod sledi, da je funkcija

$$g(z) = \frac{1}{h\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{z} + \frac{a_2}{2} \cdot \frac{1}{z^3} + \dots}$$

$$\equiv \frac{z}{1 + \frac{a_2}{2} \cdot \frac{1}{z^2} + \dots}$$

$$= z \cdot \left(1 - \frac{a_2}{2} \cdot \frac{1}{z^2} + \dots\right)$$

$$= z - \frac{a_2}{2} \cdot \frac{1}{z} + \dots$$

injektivna hodo. na $z \in A = \{ |z| > 1 \}$.

S tem je lema dokazana.

-3.13-

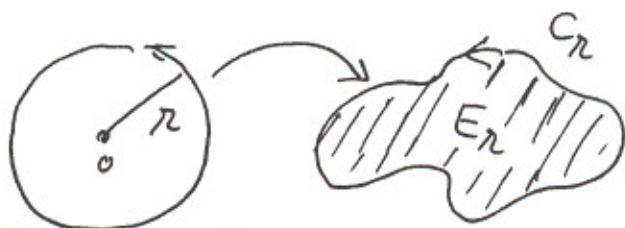
Lema. Naj bo $g(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots$

injektivna holomorfná funkcia na $A = \{z \mid 1 < |z| < \infty\}$.

Potem je $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot |b_n|^2 \leq 1$. Torej $|b_1| \leq 1$.

Dokaz. Izberemo $r > 1$.

$$C_r \stackrel{\text{def}}{=} \{g(z) \mid |z| = r\}$$



je sklenjena Jordanova krivulja, ki omejuje neko domeno E_r . Po trditvi na strani 3.8 velja

$$\begin{aligned} 0 \leq pl(E_r) &= \frac{i}{2} \iint_{E_r} dw \wedge d\bar{w} = \frac{1}{2i} \int_{C_r} \bar{w} \cdot dw \\ &= \frac{1}{2i} \int_{|z|=r} \overline{g(z)} \cdot g'(z) dz \end{aligned}$$

$$z = r e^{i\theta}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \left(r e^{-i\theta} + \sum_{k=0}^{\infty} \bar{b}_k \frac{e^{ik\theta}}{r^k} \right) \cdot \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n b_n e^{-i(n+1)\theta}}{r^{n+1}} \right) i r d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(r + \sum_{k=0}^{\infty} \bar{b}_k \frac{e^{i(k+1)\theta}}{r^k} \right) \cdot \left(r - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot b_n e^{-i(n+1)\theta}}{r^n} \right) d\theta \end{aligned}$$

Pri integraciji se unesejo vsi členi razen tisti $z r^2$ in tisti s $k=n$. Dobimo

$$0 \leq \pi \left(r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot |b_n|^2}{r^{2n}} \right).$$

Pri prehodu $r \downarrow 1$ dobimo $1 - \sum n |b_n|^2 \geq 0$. Dokazano.

Zaključek dokaza trditve:

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots, \quad f \in \mathcal{F}.$$

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{f\left(\frac{1}{z^2}\right)}} = z - \frac{a_2}{2} \cdot \frac{1}{z} + \dots = z + b_1 \cdot \frac{1}{z} + \dots$$

g je injektivna holomorfna na $A = \{1 < |z| < \infty\}$.

iz druge leme sledi: $|b_1| \leq 1$, torej

$$\left| -\frac{a_2}{2} \right| \leq 1 \Rightarrow |a_2| \leq 2.$$

POSLEDICA (Koebejev $1/4$ izrek).

Za $\forall f \in \mathcal{F}$ velja $\mathbb{D}(0, \frac{1}{4}) \subset f(\mathbb{D})$.

Dokaz. $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$, $|a_2| \leq 2$.

Recimo da $w \notin f(\mathbb{D})$. Definiramo

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{w f(z)}{w - f(z)} = \frac{f(z)}{1 - \frac{f(z)}{w}} = f(z) \cdot \left(1 + \frac{f(z)}{w} + \frac{f(z)^2}{w^2} + \dots \right) \\ &= (z + a_2 z^2 + \dots) \cdot \left(1 + \frac{z}{w} + \frac{a_2 z^2}{w} + \dots \right) \\ &= z + \left(a_2 + \frac{1}{w} \right) z^2 + O(z^3). \end{aligned}$$

Očitno je $F \in \mathcal{F}$, zato sledi $\left| a_2 + \frac{1}{w} \right| \leq 2$.

Odtod: $\left| \frac{1}{w} \right| = \left| a_2 + \frac{1}{w} - a_2 \right| \leq \left| a_2 + \frac{1}{w} \right| + |a_2| \leq 4$,

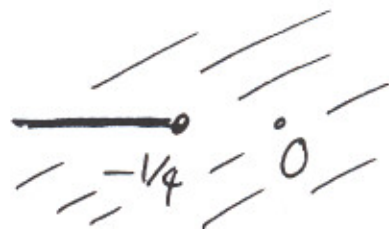
$$|w| \geq \frac{1}{4}.$$

Torej je $\mathbb{D}(0, 1/4) \subset f(\mathbb{D})$. Dokazano.

Primer: $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots$

je konformni izomorfizem diska $\mathbb{D}$ na

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x+io \mid x \leq -1/4\}.$$



Ta primer kaže, da je

konstanta $1/4$ največja možna
(če bi ne velja za večjo konstanto).

S pomočjo Bieberbachove trditve $|a_2| \leq 2$
in uporabe konformnih avtomorfizmov diska
bomo sedaj ocenili $|f''(z)|$ za $f \in \mathcal{S}$ v
povzbuhi točki $z \in \mathbb{D}$. Glavni rezultat:

IZREK. Za vsako $f \in \mathcal{S}$ velja ocena

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(re^{i\theta})| \leq \frac{r}{(1-r)^2} ; \quad 0 \leq r < 1, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

POSLEDICA (desne ocene): $\mathcal{S}$ je normalna družina.

Po Montelovem izreku je vsaka limita funkcij iz $\mathcal{S}$
spet injektivna, torej v $\mathcal{S}$.

Torej je $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$ kompaktna v $\mathcal{H}(\mathbb{D})$.

Dokaz. Najprej ocenimo odvod $f''(a)$ v poljubni točki $a = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$.

Označimo $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$.

Vemo: $\varphi_a \in \text{Aut } \mathbb{D}$, $\varphi_a(a)=0$, $\varphi_a(0)=a$,
 $\varphi_a'(0) = 1-|a|^2$.

$$(f \circ \varphi_a)(0) = f(a)$$

$$(f \circ \varphi_a)'(0) = f'(a) \cdot \varphi_a'(0) = (1-|a|^2) f'(a).$$

Definiramo novo funkcijo

$$F(z) = \frac{f \circ \varphi_a(z) - f(a)}{(1-|a|^2) \cdot f'(a)}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

F je injektivna holomorfná, saj je $f \circ \varphi_a$ injektivna holo, F pa je iz nje dobljena s kompozicijo s afnim linearnim preslikavo.

Velja tudi: $F(0)=0$, $F'(0)=1$. Torej $F \in \mathcal{S}$.
 Torej leži razvoj okrog $z=0$:

$$F(z) = z + A_2 \cdot z^2 + \dots \quad ; \quad |A_2| \leq 2.$$

$$\begin{aligned} A_2 = \frac{F''(0)}{2} &= \frac{1}{2(1-|a|^2) \cdot f'(a)} \cdot \left(f''(a) \cdot (1-|a|^2)^2 - 2\bar{a} f'(a) \cdot (1-|a|^2) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left((1-|a|^2) \cdot \frac{f''(a)}{f'(a)} - 2\bar{a} \right). \end{aligned}$$

Pomnožimo z $\frac{2a}{1-|a|^2}$:

$$\frac{2a \cdot A_2}{1-|a|^2} = a \cdot \frac{f''(a)}{f'(a)} - \frac{2|a|^2}{1-|a|^2}$$

$a = re^{i\theta}$. Delimo z r in upoštevamo $|A_2| \leq 2$:

$$(*) \quad \left| \frac{e^{i\theta} f''(a)}{f'(a)} - \frac{2r}{1-r^2} \right| = \left| \frac{2e^{i\theta} A_2}{1-r^2} \right| \leq \frac{4}{1-r^2}; \quad a = re^{i\theta}.$$

Ker je $f \in \mathcal{S}$, torej f injektivna, je $f'(z) \neq 0$ za $\forall z \in \mathbb{D}$. Definiramo

$$g(z) = \log f'(z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

$$g'(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)}.$$

$$\operatorname{Re} g(z) = \operatorname{Re} \log f'(z) = \log |f'(z)|.$$

Ogledamo si radialni odvod funkcije $\operatorname{Re} g$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \operatorname{Re} g(re^{i\theta}) &= \operatorname{Re} \left(\frac{\partial}{\partial r} g(re^{i\theta}) \right) \\ &= \operatorname{Re} (g'(re^{i\theta}) \cdot e^{i\theta}) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} \cdot e^{i\theta} \right) \end{aligned}$$

Po oceni (*) se to šteje razlikuje od $\frac{2r}{1-r^2}$ za največ $\frac{4}{1-r^2}$. Odtod dolimo drugo oceno:

-3.18-

$$\frac{2r}{1-r^2} - \frac{4}{1-r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r} \underbrace{\operatorname{Re} g(re^{i\theta})}_{\log |f'(re^{i\theta})|} \leq \frac{2r}{1-r^2} + \frac{4}{1-r^2}$$

$$-\frac{1}{1-r} - \frac{3}{1+r} \leq \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(re^{i\theta})| \leq \frac{3}{1-r} + \frac{1}{1+r}$$

Integriramo po $r \in [0, \rho]$, kjer je $0 \leq \rho < 1$:

$$\log \frac{1-\rho}{(1+\rho)^3} \leq \log |f'(\rho e^{i\theta})| \leq \log \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3}$$

$$\frac{1-\rho}{(1+\rho)^3} \leq |f'(\rho e^{i\theta})| \leq \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3} \quad (**)$$

Sedaj bomo uporabili le desno oceno, ki jo ponovno integriramo po ρ na intervalu $\rho \in [0, r]$, $0 \leq r < 1$:

$$\begin{aligned} |f(re^{i\theta})| &= \left| \int_0^r f'(\rho e^{i\theta}) \cdot e^{i\theta} d\rho \right| \\ &\leq \int_0^r |f'(\rho e^{i\theta})| \cdot d\rho \\ &\leq \int_0^r \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3} d\rho = \frac{r}{(1-r)^2} \end{aligned}$$

Rezultat: $|f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$, $\forall z \in \mathbb{D}$, $\forall f \in \mathcal{S}$.

To je desna ocena v trditvi.
~~Če dokažemo leve ocene potrebujemo naslednji izrek, ki sledi iz ocene koeficienta a_2 ($|a_2| \leq 2$). To del lahko izpustimo, ker ga ne bomo potrebovali.~~

Dokaži levo oceno $\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(re^{i\theta})| :$

$z = re^{i\theta}$. Če je $|f(z)| \geq \frac{1}{4} > \frac{r}{(1+r)^2}$, ni kaj dokazovati.

Recimo sedaj, da je $|f(z)| < 1/4$. Po Koebejevem izreku tedaj delfica s krajisci 0 in $f(z)$ leži v $\mathbb{D}(0, 1/4) \subset f(\mathbb{D})$. Naj bo C lok v $\mathbb{D}$ od 0 do z , tako da je $f(C)$ ravno delfica od 0 do $f(z)$. Lok C lahko parametriziramo ~~tako~~: s preslikavo $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ tako, da je

$$\gamma(\gamma(t)) = t \cdot f(z), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Sedaj je $\gamma'(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \equiv f(z)$.

$$\text{Odtod: } f(z) = \int_0^1 f(z) \cdot dt$$

$$|f(z)| = \int_0^1 |f(z)| \cdot dt = \int_0^1 |\gamma'(\gamma(t))| \cdot |\dot{\gamma}(t)| \cdot dt.$$

$$\text{Pišimo } \gamma(t) = r(t) e^{i\theta(t)}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{r}(t) e^{i\theta(t)} + i r(t) \dot{\theta}(t) e^{i\theta(t)}$$

Sumanda sta realno pravokotna drug na drugega, zato $|\dot{\gamma}(t)| \geq |\dot{r}(t)| \geq \dot{r}(t)$.

Ocenimo še integrand $|\gamma'(\gamma(t))| :$

-3.20-

$$|f'(r(t)e^{i\theta(t)})| \geq \frac{1-r(t)}{(1+r(t))^3} > 0$$

po levi oceni v (**). Odtod:

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \int_0^1 |f'(r(t))| \cdot |\dot{r}(t)| \cdot dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{1-r(t)}{(1+r(t))^3} \cdot r(t) dt \\ &= \int_0^{|z|} \frac{1-r}{(1+r)^3} \cdot dr \\ &= \frac{|z|}{(1+|z|)^2} \end{aligned}$$

S tem je trditev v celoti dokazana.

Z renormalizacijo lahko dokazemo Koebejevi izrek tudi za druge diske.

TRDITEV. Naj bo $f: \mathbb{D}(a, R) \rightarrow \mathbb{C}$ injektivna holomorfná fn. Tedaj $f(\mathbb{D}(a, R)) \supset \mathbb{D}(f(a), \frac{R \cdot |f'(a)|}{4})$. □

Dokaz. Uporabimo Koebejevi izrek za

$$\text{funkcijo } g(z) = \frac{1}{R \cdot f'(a)} (f(Rz + a) - f(a)), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Lahko je preveriti, da je $g \in \mathcal{S}$.

14. 3. IZREK LANDAUA

Vprašanje: Ali lahko Koebesov $1/4$ -izrek na kakšen način preplestimo na neinjektivne holomorfnе funkcije na disku?

IZREK. (Landau)

Denimo, da je f holomorfnе na $\mathbb{D}$,

$$f'(0) = 1 \quad \text{in} \quad \lim_{|z| \rightarrow 1} (1 - |z|) \cdot |f'(z)| = 0.$$

Potem obstaja točka $b \in \mathbb{C}$, tako da velja

$$\mathbb{D}(b, \frac{1}{16}) \subset f(\mathbb{D}).$$

Torej, zalega vrednosti funkcije f vsebuje nek disk polmera $1/16$.

OPOMBE.

1° Druga predpostavka $\lim_{|z| \rightarrow 1} (1 - |z|) \cdot |f'(z)| = 0$ je izpolnjena na primer, če je $|f'|$ omejena na $\mathbb{D}$.

To je vs, če je f holomorfnе na nekoliko večjem disku $\mathbb{D}(0, R)$, $R > 1$.

2. Največji sterilo $\lambda \geq 1/16$, tako da $f(\mathbb{D})$ vsebuje nek disk $\mathbb{D}(b, \lambda)$ za vsako funkcijo, ki zadošča predpostavkam, se imenuje konstanta Landana. Njena vrednost ni znana.

Dokaz. Ogledajmo si izraz

$$M(z) = (1 - |z|) \cdot |f'(z)|, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Ker je $M(0) = |f'(0)| = 1$ in $\lim_{|z| \rightarrow 1} M(z) = 0$,

deseže $M(z)$ svoj maksimum na $\mathbb{D}$ v neki točki $z_0 = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$:

$$1 \leq M = (1 - r) \cdot |f'(z_0)| = \max_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|) \cdot |f'(z)|.$$

Opomba: Izraz $M(z)$ je primerljiv izrazu

$$(1 + |z|) M(z) = (1 - |z|^2) \cdot |f'(z)| = |(f \circ \varphi_z)'(0)|,$$

kjer je $\varphi_z \in \text{Aut } \mathbb{D}$, $\varphi_z(0) = z$. V resnici smo torej preiskali maksimum odvodov

$$|(f \circ \varphi_z)'(0)| \text{ po vseh } z \in \mathbb{D}. \quad \leftarrow$$

Ogledajmo si funkcijo

$$g(\zeta) = \frac{1}{M} \cdot (f(\zeta + z_0) - f(z_0)), \quad |\zeta| < 1 - r.$$

Ker je $|\zeta + z_0| \leq |\zeta| + |z_0| < (1 - r) + r = 1$, je g dobro def., holomorfa, in

$$g(0) = 0, \quad |g'(0)| = \frac{1}{M} \cdot |f'(z_0)| = \frac{1}{1 - r}.$$

Prejato $f \approx g$:

$$f(z+z_0) = f(z_0) + M \cdot g(z); \quad |z| < 1-r.$$

Če dokažemo, da $\{g(z) \mid |z| < \frac{1-r}{2}\}$ vsebuje disk $\mathbb{D}(0, \frac{1}{16})$, bo sledilo (ker je $M \geq 1$),

$$\text{da } \mathbb{D}(f(z_0), \frac{1}{16}) \subset \{f(z+z_0) \mid |z| < \frac{1-r}{2}\} \subset f(\mathbb{D}).$$

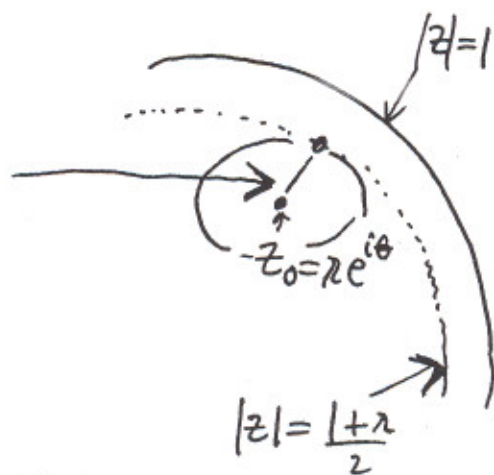
S tem bo izrek dokazan.

radij $\frac{1-r}{2}$

Ogledajmo si $|g'(z)|$ v točkah z ,

$$|z| \leq \frac{1-r}{2}; \quad |z+z_0| \leq |z| + |z_0|$$

$$\leq \frac{1-r}{2} + r = \frac{1+r}{2}.$$



$$|g'(z)| = \frac{1}{M} \cdot |f'(z+z_0)|$$

$$\leq \frac{1}{M} \cdot \max_{|z| \leq \frac{1+r}{2}} |f'(z)|$$

$$\leq \frac{1}{M} \cdot \max_{|z| \leq \frac{1+r}{2}} \left[\frac{1-|z|}{(\frac{1-r}{2})} \cdot |f'(z)| \right]$$

$$\leq \frac{2}{1-r} \cdot \frac{1}{M} \cdot \max_{|z| < 1} M(z) \leq \frac{2}{1-r}.$$

Le koeficient je ≥ 1 .

Torej: $|g'(z)| \leq \frac{2}{1-r}; \quad |z| \leq \frac{1-r}{2}.$

-3.24-

Od tod delimo z oceno integrala za $|z| \leq \frac{1-\alpha}{2}$:

$$\begin{aligned} |g(z)| &= \left| \int_0^z g'(w) dw \right| \\ &\leq |z| \cdot \sup_{w \in [0, z]} |g'(w)| \\ &\leq |z| \cdot \frac{2}{1-\alpha} \leq 1. \end{aligned}$$

Recimo sedaj, da neko kompleksno število w ne leži v zalogi vrednosti funkcije g na $\mathbb{D}(0, \frac{1-\alpha}{2})$. Torej

$$w \neq 0 = g(0), \quad 1 - \frac{g(z)}{w} \neq 0, \quad \forall |z| \leq \frac{1-\alpha}{2}.$$

Definiramo holomorfno funkcijo

$$h(z) = \sqrt{1 - \frac{g(z)}{w}} = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

$$a_1 = h'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{g(0)}{w}}} \cdot \left(-\frac{1}{w} \cdot g'(0)\right) = -\frac{g'(0)}{2w}.$$

$$|a_1| = \frac{|g'(0)|}{2 \cdot |w|} = \frac{1}{2(1-\alpha) \cdot |w|}.$$

$$|h(z)|^2 = \left| 1 - \frac{g(z)}{w} \right| \leq 1 + \frac{|g(z)|}{|w|} \leq 1 + \frac{1}{|w|},$$

ker je $|g(z)| \leq 1$ po zgornji oceni.

-3.25-

Sedaj:

$$1 + |a_1|^2 \cdot \left(\frac{1-r}{2}\right)^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \cdot \left(\frac{1-r}{2}\right)^{2n} \quad (\text{trivialno})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| h\left(\frac{1-r}{2} e^{i\theta}\right) \right|^2 d\theta$$

$$\leq 1 + \frac{1}{|w|}.$$

Upoštevaj

$$|a_1|^2 = \frac{1}{4(1-r)^2 \cdot |w|^2} \quad \text{dobimo:}$$

$$1 + \frac{1}{4(1-r)^2 \cdot |w|^2} \cdot \frac{(1-r)^2}{4} \leq 1 + \frac{1}{|w|}$$

$$1 + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{|w|^2} \leq 1 + \frac{1}{|w|}$$

$$\frac{1}{16 \cdot |w|} \leq 1, \quad |w| \geq \frac{1}{16}.$$

Torej $\mathbb{D}(0, \frac{1}{16})$ leži v zalogi vrednosti
funkcije g .

OPOMBA: Dokažemo lahko tudi Blochov izrek:

$\exists \beta > 0$, tako da za $\forall f$ v izreku Landana
dostaja disk $\Delta \subset \mathbb{D}$, na katerem je f injektivna
in $f(\Delta) \supset \mathbb{D}(b, \beta)$ za nek $b \in \mathbb{D}$.

(β = Blochova konstanta).

POSLEDICA. Če je $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nekonstantna
cela funkcija, potem njeine zaloge vrednosti
vsebuje poljubno velike diske:

$$\forall R > 0 \quad \exists b \in \mathbb{C} : \mathbb{D}(b, R) \subset f(\mathbb{C}).$$

Dokaz. Izberemo točko $a \in \mathbb{R}$, tako da je
 $f'(a) \neq 0$. Izberemo $r > 0$ in si ogledamo
~~celo~~ funkcijo

$$g(z) = \frac{f(rz + a)}{r \cdot f'(a)}; \quad |z| \leq 1.$$

Očitno je $g'(0) = \frac{f'(a) \cdot r}{r \cdot f'(a)} = 1$.

Po izreku Landana $g(\mathbb{D})$ vsebuje disk
 $\mathbb{D}(b, \frac{1}{16})$.

Ker je $f(rz + a) = r \cdot f'(a) \cdot g(z)$,
zaloge vrednosti f vsebuje disk

$$\mathbb{D}(b, \frac{r \cdot |f'(a)|}{16}).$$

Izberemo $r \gg 0$, tako da je $\frac{r \cdot |f'(a)|}{16} \geq R$.

III.4. MALI PICARDOV IZREK

IZREK. Če funkcija, ki izpušča vsaj dve vrednosti, je konstanta.

Natančno: $f: \mathbb{C} \xrightarrow{\text{holo}} \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$, $a \neq b \in \mathbb{C}$
 $\Leftrightarrow f$ konstanta.

Dokaz. Funkcija $z \mapsto \frac{f(z)-a}{b-a}$ ($z \in \mathbb{C}$)

izpušča vrednosti 0 in 1. Če je ta funkcija konstantna, je tudi f konstantna.

Torej zadostja dokazati izrek za primer $a=0, b=1$.

~~Ker~~ Naj bo torej $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ cela funkcija.

Ker je $f \neq 0$, je $f = e^{2\pi i g}$, $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ cela.

Ker je $f \neq 1$, velja $g(z) \notin \mathbb{Z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

To je, g izpušča vse celostne vrednosti.

Lema. Če μ $\Omega \subset \mathbb{C}$ enostavno povezano domeno,
in je $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{-1, +1\}$ holomorfn,
potem je $g(z) = \cosh h(z) = \frac{e^{h(z)} + e^{-h(z)}}{2}$
za neko $h: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfn.

Dokaz. $g(z) \neq \pm 1 \Rightarrow g(z)^2 - 1 \neq 0, \forall z \in \Omega$
 $\Rightarrow \exists G(z) = \sqrt{g(z)^2 - 1}; z \in \Omega.$

Prej: $g^2 - 1 = G^2 \Leftrightarrow g^2 - G^2 = 1$
 $\Leftrightarrow (g + G)(g - G) = 1.$

Kaj bo $z_0 \in \Omega$ in naj bo H ena od
funkcij $g \pm G$, izbrana tako, da je $|H(z_0)| \geq 1$.

Potem je $\frac{1}{H} = g \mp G$, kar sledi iz $(g - G)(g + G) = 1$.

Ker je $H \neq 0$, obstaja njen holomorfen log:

$$\exists h(z) = \log H(z); -\pi \leq \operatorname{Im} h(z_0) < \pi.$$

Sedaj: $\cosh h = \frac{e^h + e^{-h}}{2} = \frac{H + \frac{1}{H}}{2}$
 $= \frac{(g + G) + (g - G)}{2}$
 $= g.$

Nadaljujemo z dokazom Picardovega izreka.

S pomočjo leme dolimo

$$f(z) = e^{2\pi i \cosh(h(z))}; \quad z \in \mathbb{C}.$$

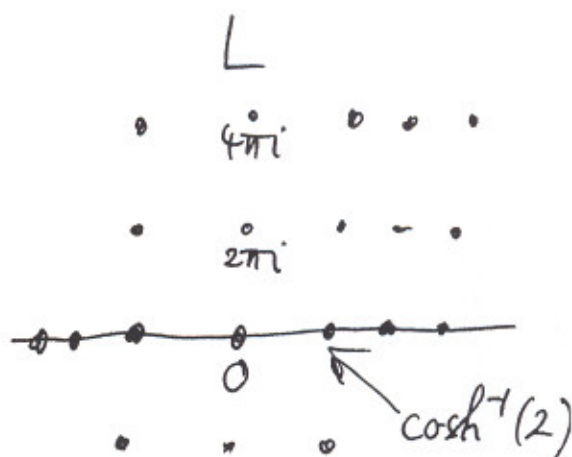
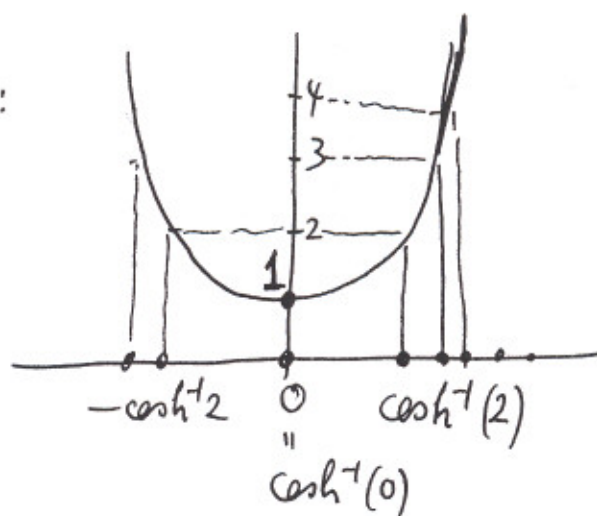
Funkcija $\cosh$ je $2\pi i$ -periodična, soda.

Funkcija $\cosh(h(z))$ mora izpuščati vse celostne vrednosti $0, \pm 1, \pm 2, \dots$

zato mora h izpuščati vse vrednosti v množici števil.

$$L = \{ \pm \cosh^{-1}(n+1) + m 2\pi i \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} \}.$$

$\cosh$:



Največja razdalja med $\cosh^{-1}(n+2) - \cosh^{-1}(n+1)$ je pri $n=0$, kjer je ~ 1.317 ; nato se manjša.

Sledi, da je vsaka točka $w \in \mathbb{C}$ na razdalji

$$\leq \sqrt{\pi^2 + 1.317^2} \quad \text{od neke točke iz } L.$$

Torej obstaja število $R > 0$ z lastnostjo, da $\mathbb{C} \setminus L$ ne vsebuje nobenega diska polmera R .

Ker je $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus L$ cela, je h bodisi konstantna, bodisi $h(\mathbb{C})$ vsebuje poljubno velike diske po posledici izreke Landaua. Toda druga možnost je izključena, zato je h in s tem

$$f = e^{2\pi i \cosh h} \text{ konstanta.}$$

VELIKI PICARDOV IZREK:

Če je $a \in \mathbb{C}$ bistvena izolirana singularnost holo. funkcije f , potem f v vsaki ~~okoli~~ punktirani okolici točke a vzpostavi največ eno vrednost.

Primer: $e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$ ima bistveno sing. pri $z=0$, in vzpostavi vrednost 0.

Vse druge vrednosti zavzame v vsaki okolici $\mathbb{D}(0, \delta) \setminus \{0\}$ neskončnokrat.

Dokaz: Berenstein & Gay, 2.7.14. Izrek, str. 189.