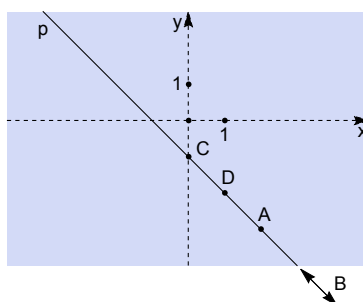


Afina in projektivna geometrija

Dvorazmerje

- (1) Dane so točke $A = [2 : -3 : 1]$, $B = [1 : -1 : 0]$, $C = [0 : -1 : 1]$ in $D = [1 : -2 : 1]$ v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$.
- (a) Pokaži, da so točke A, B, C in D kolinearne in poišči enačbo premice p , ki jih vsebuje.
- (b) Izračunaj dvorazmerji $\mathcal{D}(A, B, C, D)$ in $\mathcal{D}(B, D, A, C)$.

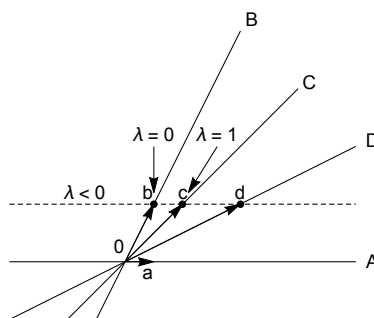
Rešitev: (a) Poglejmo najprej skico.



Z računom ali pa s skice lahko razberemo, da ima premica p , ki vsebuje dane točke, enačbo

$$x + y + z = 0.$$

(b) Dvorazmerje $\mathcal{D}(A, B, C, D)$ štirih točk na projektivni premici nam pove, kakšne so koordinate točke $D \neq A$ glede na projektivno ogrodje, ki ga določajo točke C, A in B .



Formalno ga lahko definiramo takole. Izberimo nek vektor $c \in \mathbb{R}^3$, ki leži na premici, ki določa točko C . Potem lahko izberemo vektorja a in b , ki ležita na premicah, ki določata točki A in B in ki zadoščata pogoju

$$c = a + b.$$

Ker tvorita vektorja a in b bazo prostora, ki določa projektivno premico, obstaja enolično določen $\lambda \in \mathbb{R}$, da vektor

$$d = \lambda a + b$$

leži na premici v $\mathbb{R}^3$, ki je določena s točko D . Pri tem moramo predpostaviti, da $D \neq A$. Parametru λ rečemo *dvorazmerje* točk A, B, C in D ter ga označimo z

$$\mathcal{D}(A, B, C, D) = \lambda.$$

Izberimo $c = (0, -1, 1)$ in $a' = (2, -3, 1)$, $b' = (1, -1, 0)$. Najprej moramo vektor c zapisati kot vsoto vektorjev, ki ležita na premicah, ki določata točki A in B . Pišimo:

$$\begin{aligned} c &= \alpha a' + \beta b', \\ (0, -1, 1) &= \alpha(2, -3, 1) + \beta(1, -1, 0), \\ (0, -1, 1) &= (2, -3, 1) + (-2, 2, 0). \end{aligned}$$

Označimo torej $a = (2, -3, 1)$ in $b = (-2, 2, 0)$. Če označimo $d' = (1, -2, 1)$, je dvorazmerje $\lambda = \mathcal{D}(A, B, C, D)$ natanko določeno s pogojem:

$$\begin{aligned} \delta d' &= \lambda a + b, \\ \delta(1, -2, 1) &= \lambda(2, -3, 1) + (-2, 2, 0). \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je $\lambda = \delta = 2$, od koder sledi

$$\mathcal{D}(A, B, C, D) = 2.$$

Ko enkrat izračunamo dvorazmerje danih štirih točk v nekem vrstnem redu, lahko za izračun dvorazmerja pri ostalih vrstnih redih uporabimo formuli:

- (1) $\mathcal{D}(B, A, C, D) = \mathcal{D}(A, B, D, C) = \mathcal{D}(A, B, C, D)^{-1}$,
- (2) $\mathcal{D}(A, C, B, D) = \mathcal{D}(D, B, C, A) = 1 - \mathcal{D}(A, B, C, D)$.

V našem primeru tako dobimo

$$\mathcal{D}(B, D, A, C) = \mathcal{D}(D, B, A, C)^{-1} = \mathcal{D}(D, B, C, A) = 1 - \mathcal{D}(A, B, C, D) = -1.$$

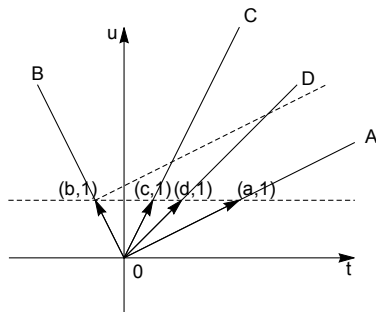
Opomba: Dvorazmerje $\mathcal{D}(A, B, C, D)$ točk A, B, C, D na projektivni premici p določa koordinate točke D glede na projektivno ogrodje, ki ga definirajo točke C, A in B . Če namreč označimo s $\theta : P(\mathbb{R}^2) \rightarrow p$ projektivnost, ki je določena s pogoji:

$$\begin{aligned} \theta([1 : 0]) &= A, \\ \theta([0 : 1]) &= B, \\ \theta([1 : 1]) &= C, \end{aligned}$$

je točka D slika točke $[\lambda : 1]$, kjer je $\lambda = \mathcal{D}(A, B, C, D)$. V primeru, ko leži točka A v neskončnosti, se $\mathcal{D}(A, B, C, D)$ ujema z afino koordinato točke D glede na afino ogrodje, ki ga določata točki B in C . $\square$

- (2) Naj bodo $A = [a : 1]$, $B = [b : 1]$, $C = [c : 1]$ in $D = [d : 1]$ točke na projektivni premici $P(\mathbb{R}^2)$. Izračunaj dvorazmerje $\mathcal{D}(A, B, C, D)$.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo izračunali dvorazmerje četverice realnih števil.



Najprej bomo poiskali α in β tako, da bo veljalo

$$(c, 1) = \alpha(a, 1) + \beta(b, 1).$$

Dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} c &= \alpha a + \beta b, \\ 1 &= \alpha + \beta, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $\alpha = \frac{c-b}{a-b}$ in $\beta = \frac{a-c}{a-b}$. Nadalje mora veljati

$$\delta(d, 1) = \delta\alpha(a, 1) + \beta(b, 1).$$

Tako dobimo sistem:

$$\begin{aligned} \delta d &= \lambda \alpha a + \beta b, \\ \delta &= \lambda \alpha + \beta. \end{aligned}$$

Izračunamo lahko, da velja

$$\lambda = \frac{b-d}{d-a} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{b-d}{d-a} \cdot \frac{a-c}{c-b}.$$

Ta izraz lahko zapišemo tudi v obliki

$$\mathcal{D}(A, B, C, D) = \frac{c-a}{d-a} \cdot \frac{d-b}{c-b},$$

ki nakazuje izvor imena dvorazmerje. Če je $A = [1 : 0]$ točka v neskončnosti, dobimo

$$\mathcal{D}(A, B, C, D) = \frac{d-b}{c-b}.$$

Opomba: V evklidski ravnini za definicijo dvorazmerja pogosto uporabljamo naslednjo formulo. Naj bodo A, B, C in $D \neq A$ točke na premici v $\mathbb{R}^2$. Potem definiramo

$$\mathcal{D}(A, B, C, D) = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{BD}{BC},$$

kjer so AC, AD, BD in BC predznačene dolžine daljic.

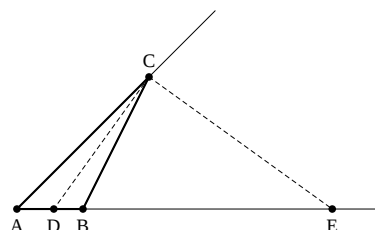
□

- (3) Naj bo ABC trikotnik v $\mathbb{R}^2$. Označimo z D in E presečišči simetral notranjega oziroma zunanjega kota pri oglišču C s premico AB . Izračunaj dvorazmerje $\mathcal{D}(A, B, D, E)$.

Rešitev: Po znanem izreku delita simetrali notranjega in zunanjega kota pri danem oglišču nasprotno stranico v razmerju, ki je enako razmerju priležnih stranic

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AE|}{|BE|}.$$

Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da ležijo točke A, B, D in E na x -osi in da so njihove koordinate $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$, $D = (d, 0)$ in $E = (e, 0)$.



Potem velja

$$\mathcal{D}(A, B, D, E) = \frac{d-a}{e-a} \cdot \frac{e-b}{d-b} = \frac{|AD|}{|AE|} \cdot \frac{|BE|}{|BD|} = -\frac{|AD|}{|BD|} \cdot \frac{|BE|}{|AE|} = -1.$$

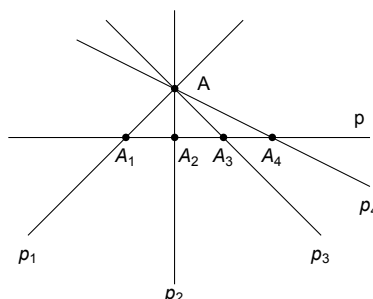
Kolinearnim točkam A, B, D, E , ki zadoščajo pogoju

$$\mathcal{D}(A, B, D, E) = -1,$$

pravimo *harmonična četverka*. □

- (4) Dane so premice $p_1 = \{[x : y : z] \mid x = 0\}$, $p_2 = \{[x : y : z] \mid x - 2y - 2z = 0\}$ in $p_3 = \{[x : y : z] \mid y + z = 0\}$ v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$. Poišči premico p_4 , za katero velja $\mathcal{D}(p_1, p_2, p_3, p_4) = -1$.

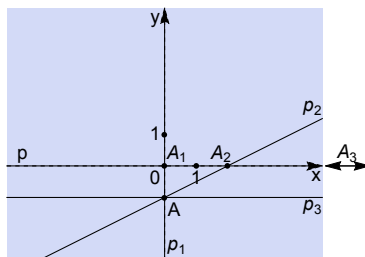
Rešitev: Imejmo šop premic p_1, p_2, p_3 in p_4 v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$, ki potekajo skozi točko A in naj bo p premica, ki ne poteka skozi A . Preseke premice p s premicami p_i označimo z $A_i = p_i \cap p$.



Dvorazmerje šopa premic je potem definirano s predpisom

$$\mathcal{D}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \mathcal{D}(A_1, A_2, A_3, A_4).$$

V našem primeru imamo naslednjo skico na afinem delu $z = 1$.



Premice p_1 , p_2 in p_3 potekajo skozi točko

$$A = [0 : -1 : 1].$$

Za premico p lahko sedaj izberemo katerokoli premico, ki ne vsebuje točke A . Pametno je izbrati čimbolj preprosto premico, da si poenostavimo računanje. Takšna je na primer premica $p = \{[x : y : z] \mid y = 0\}$. Njene preseke s premicami p_1 , p_2 in p_3 lahko izračunamo kar na pamet:

$$A_1 = [0 : 0 : 1],$$

$$A_2 = [2 : 0 : 1],$$

$$A_3 = [1 : 0 : 0].$$

Sedaj bomo poiskali točko A_4 na premici p , da bo veljalo $\mathcal{D}(A_1, A_2, A_3, A_4) = -1$.

Naj bo $c = (1, 0, 0)$, $a' = (0, 0, 1)$ in $b' = (2, 0, 1)$. Potem je:

$$c = \alpha a' + \beta b',$$

$$(1, 0, 0) = \alpha(0, 0, 1) + \beta(2, 0, 1),$$

$$(1, 0, 0) = (0, 0, -\frac{1}{2}) + (1, 0, \frac{1}{2}).$$

Vzemimo torej $a = (0, 0, -\frac{1}{2})$ in $b = (1, 0, \frac{1}{2})$. Od tod sledi

$$d = -a + b = (1, 0, 1)$$

oziroma

$$A_4 = [1 : 0 : 1].$$

Premica p_4 je potem premica skozi točki A in A_4 in ima enačbo

$$p_4 = \{[x : y : z] \mid x - y - z = 0\}.$$

□