

Afina in projektivna geometrija

Stožnice

- (1) Homogeniziraj dane enačbe in izračunaj presek dobljenih stožnic s premico v neskončnosti $p_\infty = \{[x : y : z] \mid z = 0\}$.
- (a) $x^2 + y^2 = 1$,
 - (b) $x^2 - y^2 = 1$,
 - (c) $y^2 = 2x$.

Rešitev: Stožnica v evklidski ravnini je krivulja, ki jo določa enačba

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Posamezni členi v zgornji enačbi imajo različne geometrijske pomeni:

- Člen $ax^2 + 2bxy + cy^2$ določa tip stožnice in pa njeno orientacijo. Neizrojene stožnice so krožnica, elipsa, parabola in hiperbola, poleg njih pa obstajajo še izrojene stožnice.
- Člen $2dx + 2ey$ določa središče stožnice.
- Člen f določa velikost stožnice.

Stožnici v evklidski ravnini $\mathbb{R}^2$, ki je določena z enačbo

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

lahko priredimo stožnico v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ s homogenizacijo zgornje enačbe. To pomeni, da vsakemu členu dodamo potenco spremenljivke z , tako da imajo na koncu vsi členi stopnjo 2. Konkretno tako dobimo stožnico z enačbo

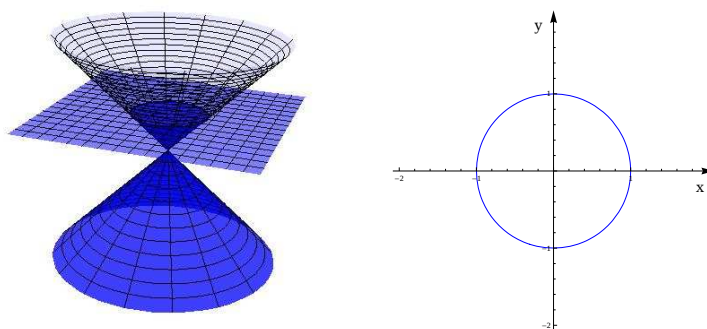
$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = 0.$$

Pri homogenizaciji torej iz kvadratne enačbe dveh spremenljivk dobimo kvadratno enačbo treh spremenljivk, ki določa neko ploskev v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^3$. Ker je dobljena enačba homogena, je ta ploskev premonosna (sestavljena iz premic), zato definira neko krivuljo v projektivni ravnini. Prvotna krivulja ustreza zožitvi te krivulje na afini del projektivne ravnine, ki je dan s pogojem $z = 1$. V splošnem pa lahko pri homogenizaciji krivulje dobimo še kakšno dodatno točko na premici v neskončnosti.

- (a) Pri homogenizaciji enačbe $x^2 + y^2 = 1$ dobimo enačbo

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Ta enačba določa neko krivuljo v projektivni ravnini, katere slika na afinem delu $z = 1$ je ravno prvotna krožnica.



Poglejmo še, ali morda vsebuje še kakšno točko na premici v neskončnosti. Na premici v neskončnosti je $z = 0$, zato dobimo pogoj

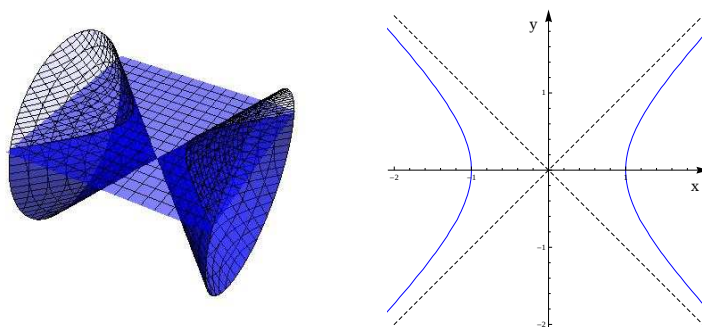
$$x^2 + y^2 = 0,$$

od koder sledi $x = y = 0$. Rešitev enačbe je torej točka $(0, 0, 0)$, ki pa ne definira nobene točke v projektivni ravnini.

(b) Pri homogenizaciji enačbe $x^2 - y^2 = 1$ dobimo enačbo

$$x^2 - y^2 = z^2.$$

Na afinem delu $z = 1$ tokrat dobimo hiperbolo.

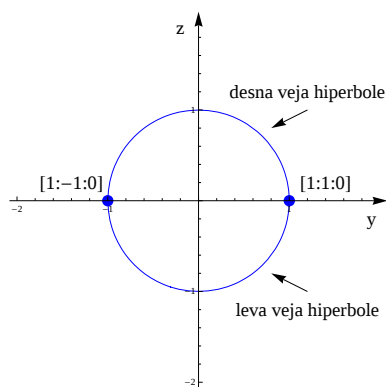


V preseku te projektivne krivulje s premico v neskončnosti so točke, za katere velja

$$x^2 - y^2 = 0.$$

Takšni sta točki $T_1 = [1 : 1 : 0]$ in $T_2 = [1 : -1 : 0]$, ustrežata pa asimptotama hiperbole.

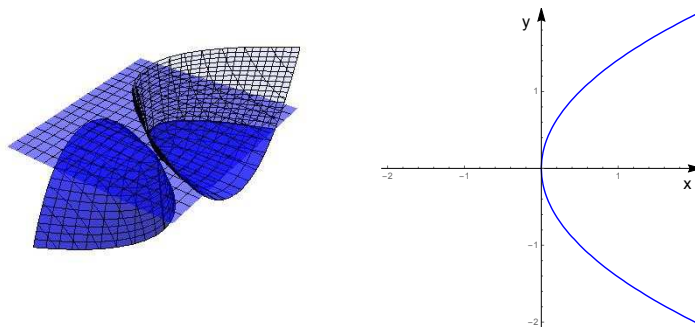
Zanimivo je pogledati, kaj dobimo, če to krivuljo pogledamo na afinem delu $x = 1$. Tam je podana z enačbo $y^2 + z^2 = 1$, kar pomeni, da gre za krožnico. Točki $(1, 0)$ in $(-1, 0)$ ustrežata točkama T_1 in T_2 , medtem ko zgornja in spodnja polkrožnica ustrežata desni in levi veji hiperbole.



(c) Za konec si pogledjmo še parabolo $y^2 = 2x$. Če to enačbo homogeniziramo, dobimo enačbo

$$y^2 = 2xz.$$

Tokrat dobimo v neskončnosti še eno dodatno točko, in sicer $T = [1 : 0 : 0]$.



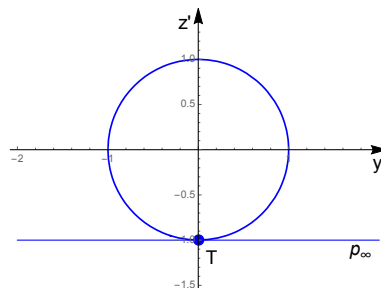
Če na to stožnico pogledamo iz različnih zornih kotov, dobimo različne slike. Izberimo nove koordinate tako, da velja:

$$\begin{aligned}x &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - z'), \\y &= y', \\z &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + z').\end{aligned}$$

V teh koordinatah ima potem stožnica enačbo

$$y'^2 + z'^2 = x'^2.$$

Na afinem delu $x' = 1$ ima standardna premica v neskončnosti enačbo $z' = -1$ in se dotika naše krivulje v točki $(0, -1)$, ki je v bistvu točka $T = [1 : 0 : 0]$. Iz tega zornega kota dobro vidimo, da je premica v neskončnosti tangenta na našo parabolo, čeprav na začetku to ni bilo jasno.



Opomba: Iz zgornjih primerov je razvidno, da v projektivni ravnini elipse, parabole in hiperbole vse predstavljajo isto stožnico, ki pa jo opazujemo iz različnih zornih kotov. V projektivni ravnini namreč do projektivne ekvivalence natanko obstaja le en tip neizrojenih stožnic. V afini in evklidski ravnini je situacija drugačna. Tam z izometrijami oziroma afinimi transformacijami ne moremo preslikati elipse v parabolo ali hiperbolo. $\square$

(2) V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ je dana stožnica $\mathcal{S} = \{[x : y : z] \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$.

- Izračunaj polare točk $A = [0 : 0 : 1]$, $B = [-1/2 : 0 : 1]$, $C = [0 : 1 : 1]$ in $D = [1 : 1 : 1]$ glede na stožnico $\mathcal{S}$.
- Poišči pola premic $p = \{[x : y : z] \mid x - z = 0\}$ in $q = \{[x : y : z] \mid x = 0\}$ glede na $\mathcal{S}$.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo spoznali geometrijska opisa polare in pola glede na stožnico v projektivni ravnini.

Naj bo $\mathcal{S}$ neprazna, neizrojena stožnica v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ in M simetrična 3×3 matrika, ki ji pripada. Nadalje naj bo $A \in P(\mathbb{R}^3)$ poljubna točka in $a \in \mathbb{R}^3$ poljuben neničeln vektor na premici skozi izhodišče, ki določa točko A . Polara točke A glede na stožnico $\mathcal{S}$ je projektivna premica

$$p_A = \{[x : y : z] \mid x^T M a = 0\}.$$

Če je p poljubna premica v projektivni ravnini, je njen *pol* tista točka p° v projektivni ravnini, katere polara je premica p .

(a) Stožnici $\mathcal{S} = \{[x : y : z] \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ pripada simetrična matrika

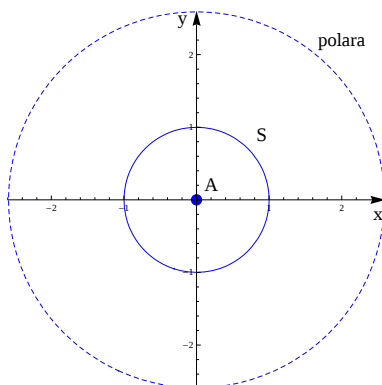
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Polara točke $A = [0 : 0 : 1]$ glede na $\mathcal{S}$:

Pri računanju polare v bistvu iščemo ortogonalni komplement vektorja Ma v $\mathbb{R}^3$. Tako dobimo ravnino v $\mathbb{R}^3$ (vektor Ma je njena normala), ki določa polaro v projektivni ravnini. V našem primeru je $Ma = (0, 0, -1)$, zato je

$$p_A = \{[x : y : z] \mid z = 0\}.$$

Polara točke A je torej premica v neskončnosti.

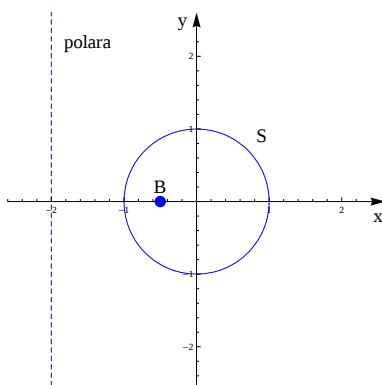


Polara točke $B = [-1/2 : 0 : 1]$ glede na $\mathcal{S}$:

Sedaj je $Mb = (-1/2, 0, -1)$, zato je

$$p_B = \{[x : y : z] \mid \frac{x}{2} + z = 0\}.$$

Na afinem delu $z = 1$ ima polara točke B enačbo $x = -2$.

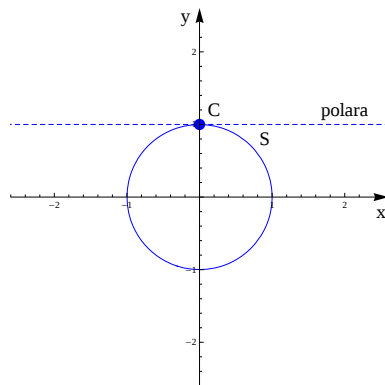


Polara točke $C = [0 : 1 : 1]$ glede na $\mathcal{S}$:

V tem primeru je $Mc = (0, 1, -1)$, od koder dobimo

$$p_C = \{[x : y : z] \mid y - z = 0\}.$$

Na afinem delu $z = 1$ ima polara točke C enačbo $y = 1$. Vidimo, da je polara v tem primeru kar tangenta na krožnico skozi točko C .

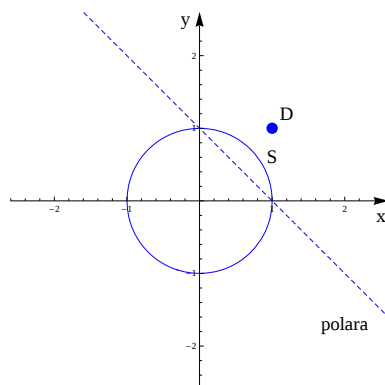


Polara točke $D = [1 : 1 : 1]$ glede na $\mathcal{S}$:

Sedaj imamo $Md = (1, 1, -1)$. Od tod sledi

$$p_D = \{[x : y : z] \mid x + y - z = 0\}.$$

Na afinem delu $z = 1$ lahko polaro točke D podamo z enačbo $x + y = 1$.



(b) Sedaj bomo imeli dano neko premico v projektivni ravnini, iskali pa bomo točko, katere polara je ta premica. Denimo, da je premica p v $P(\mathbb{R}^3)$ določena z neko ravnino v $\mathbb{R}^3$ z normalo n . Potem je pol p° premice p določen z enačbo

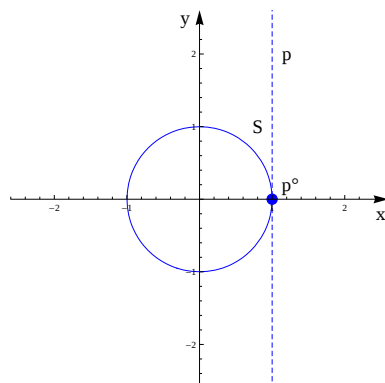
$$Ma = n.$$

Pol premice $p = \{[x : y : z] \mid x - z = 0\}$ glede na $\mathcal{S}$:

Iščemo vektor a , ki reši enačbo $Ma = (1, 0, -1)$, oziroma:

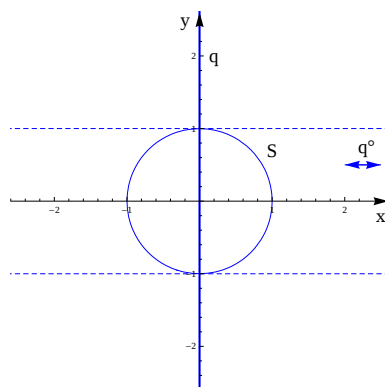
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Od tod sledi, da je pol premice p točka $p^\circ = [1 : 0 : 1]$. Vidimo, da premica p vsebuje svoj pol. To se zgodi natanko takrat, ko je premica tangentna na stožnico, pol pa je v tem primeru kar dotikališče premice in stožnice.

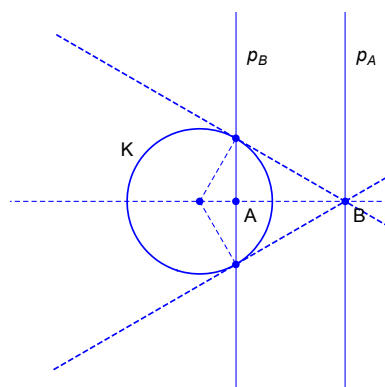


Pol premice $q : \{[x : y : z] \mid x = 0\}$ glede na $\mathcal{S}$:

Sedaj iščemo vektor a , ki reši enačbo $Ma = (1, 0, 0)$, oziroma $(x, y, -z) = (1, 0, 0)$. Pol premice q je točka $q^\circ = [1 : 0 : 0]$, ki leži na premici v neskončnosti. Točka q° je presečišče tangent na stožnico $\mathcal{S}$ v presečiščih premice q in stožnice $\mathcal{S}$.



Opomba: Pojma polare in pola po naši definiciji sta posplošitvi pojmov polare in pola glede na krožnico v evklidski ravnini. Denimo, da sta A in B inverzni točki glede na krožnico K . Potem gre polara točke A skozi točko B in je pravokotna na zveznico točk A in B . Analogno velja tudi za polaro točke B . Polara točke B seka krožnico K natanko v dotikališčih tangent na K , ki potekata skozi B .



□

(3) V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ je dana stožnica

$$\mathcal{S} = \{[x : y : z] \mid 3x^2 - 10xy + 3y^2 - 8z^2 = 0\}.$$

- (a) Poišči presek stožnice $\mathcal{S}$ s premico $p_\infty = \{[x : y : z] \mid z = 0\}$ in tangente na $\mathcal{S}$ v dobljenih točkah.
- (b) Pokaži, da je premica $p = \{[x : y : z] \mid x - y - \sqrt{2}z = 0\}$ tangentna na $\mathcal{S}$.
- (c) Izračunaj enačbi tangent na $\mathcal{S}$ skozi točko $T = [1 : 1 : 0]$.

Rešitev: Stožnici $\mathcal{S} = \{[x : y : z] \mid 3x^2 - 10xy + 3y^2 - 8z^2 = 0\}$ pripada simetrična matrika

$$M = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}.$$

(a) Najprej izračunajmo presek stožnice $\mathcal{S}$ in premice v neskončnosti p_∞ . Ko v enačbo stožnice vstavimo $z = 0$, dobimo kvadratno enačbo

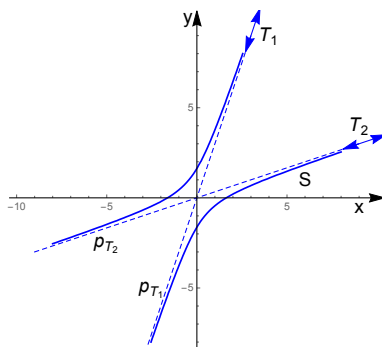
$$3x^2 - 10xy + 3y^2 = 0,$$

iz katere dobimo, da sta v preseku točki $T_1 = [1 : 3 : 0]$ in $T_2 = [3 : 1 : 0]$. Od tod lahko sklepamo, da je presek stožnice $\mathcal{S}$ z afnim delom $z = 1$ hiperbola, katere asimptoti imata smeri T_1 in T_2 . Tangenti na $\mathcal{S}$ v teh dveh točkah pa bosta ravno asimptoti te hiperbole. Vemo, da se v primeru, ko leži točka na stožnici tangenta ujema s polaro, zato moramo v bistvu izračunati polari točk T_1 in T_2 glede na $\mathcal{S}$.

Po krajšem računu dobimo, da sta polari točk $T_1 = [1 : 3 : 0]$ in $T_2 = [3 : 1 : 0]$ premici:

$$\begin{aligned} p_{T_1} &= \{[x : y : z] \mid 3x - y = 0\}, \\ p_{T_2} &= \{[x : y : z] \mid x - 3y = 0\}. \end{aligned}$$

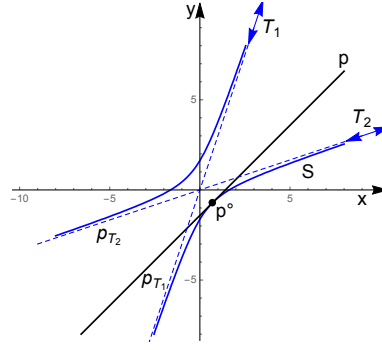
Poglejmo še skico hiperbole in njenih asimptot na afnem delu $z = 1$.



(b) Za testiranje, ali je dana premica tangentna na stožnico, imamo na voljo dokaj preprost kriterij. Premica je namreč tangentna na stožnico natanko takrat, ko vsebuje svoj pol. V našem primeru moramo torej rešiti sistem enačb

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

kar pomeni, da je pol premice p točka $p^\circ = [\frac{\sqrt{2}}{2} : -\frac{\sqrt{2}}{2} : 1]$. Preverimo lahko, da je $p^\circ \in p$, kar pomeni, da je p tangentna na $\mathcal{S}$. Stožnice pa se dotika ravno v polu.



(c) Če točka T ne leži na stožnici $\mathcal{S}$, se lahko zgodi bodisi, da skozi njo potekata dve tangenti na $\mathcal{S}$ bodisi nobena tangenta na $\mathcal{S}$. V primeru, ko obstajata, sta dotikališči tangent preseka stožnice in polare p_T . V našem primeru je polara točke T premica

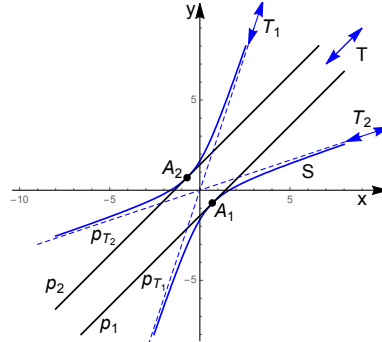
$$p_T = \{[x : y : z] \mid x + y = 0\}.$$

Polara seka stožnico v točkah $A_1 = [\frac{\sqrt{2}}{2} : -\frac{\sqrt{2}}{2} : 1]$ in $A_2 = [-\frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} : 1]$, enačbi tangent pa sta

$$p_1 = \{[x : y : z] \mid x - y - \sqrt{2}z = 0\},$$

$$p_2 = \{[x : y : z] \mid x - y + \sqrt{2}z = 0\}.$$

Vidimo, da sta točki A_1 in A_2 ravno temeni hiperbole.



□

(4) Parametriziraj šop stožnic, ki ga določata stožnici:

$$\mathcal{S}' = \{[x : y : z] \mid \frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 0\},$$

$$\mathcal{S}'' = \{[x : y : z] \mid x^2 + \frac{y^2}{4} - z^2 = 0\}$$

ter poišči vse izrojene stožnice v tem šopu.

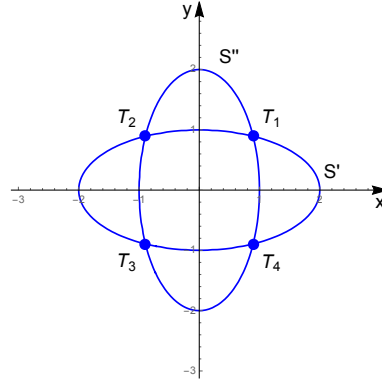
Rešitev: Stožnica v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ je natanko določena s petimi točkami v splošni legi (to pomeni, da nobene tri izmed njih niso kolinearne). Štiri točke v splošni legi pa določajo šop stožnic v $P(\mathbb{R}^3)$.

Šop stožnic lahko podamo tudi z dvema stožnicama, ki se sekata v štirih točkah v splošni legi. V našem primeru presečišča obeh stožnic zadoščajo sistemu enačb:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$$

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1,$$

katerega rešitve so $T_1 \left(\sqrt{\frac{4}{5}}, \sqrt{\frac{4}{5}} \right)$, $T_2 \left(-\sqrt{\frac{4}{5}}, \sqrt{\frac{4}{5}} \right)$, $T_3 \left(-\sqrt{\frac{4}{5}}, -\sqrt{\frac{4}{5}} \right)$ in $T_4 \left(\sqrt{\frac{4}{5}}, -\sqrt{\frac{4}{5}} \right)$. Poglejmo si skico zožitev obeh stožnic na afino ravnino $z = 1$.



Označimo z M' in M'' matriki, ki pripadata stožnicama $\mathcal{S}'$ in $\mathcal{S}''$. Zanimala nas bo družina stožnic, ki potekajo skozi te štiri točke. Tej družini rečemo šop stožnic, ki ga določata $\mathcal{S}'$ in $\mathcal{S}''$, stožnice v tej družini pa lahko opišemo z matrikami

$$M = tM' + uM'',$$

kjer je $[t : u] \in P(\mathbb{R}^2)$ (večkratniki matrike M namreč določajo isto stožnico v $P(\mathbb{R}^3)$).

V našem primeru dobimo

$$M = tM' + uM'' = t \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t}{4} + u & 0 & 0 \\ 0 & t + \frac{u}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -t - u \end{bmatrix}.$$

Izrojene so tiste stožnice v tem šopu, katerih pripadajoče matrike niso obrnljive. To pomeni, da imajo ničelno determinanto, od koder sledi

$$\det(M) = \left(\frac{t}{4} + u \right) \left(t + \frac{u}{4} \right) (-t - u) = 0.$$

Vidimo, da so v danem šopu tri izrojene stožnice.

$t = -4, u = 1$:

V tem primeru dobimo izrojeno stožnico

$$\mathcal{S}_{-4} = \left\{ [x : y : z] \mid y^2 - \frac{4}{5}z^2 = 0 \right\}.$$

Na afinem delu $z = 1$ dobimo unijo dveh vzporednih premic

$$y = \pm \sqrt{\frac{4}{5}}.$$

$t = -\frac{1}{4}, u = 1$:

V tem primeru dobimo izrojeno stožnico

$$\mathcal{S}_{-\frac{1}{4}} = \left\{ [x : y : z] \mid x^2 - \frac{4}{5}z^2 = 0 \right\},$$

ki je na afinem delu $z = 1$ unija premic

$$x = \pm \sqrt{\frac{4}{5}}.$$

$t = -1, u = 1$:

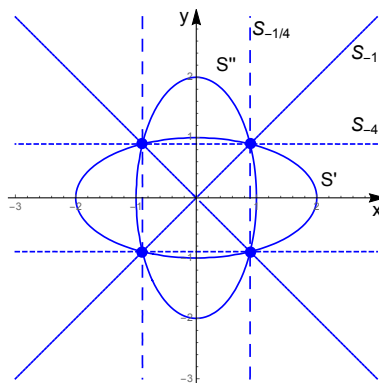
Sedaj je izrojena stožnica

$$\mathcal{S}_{-1} = \left\{ [x : y : z] \mid x^2 - y^2 = 0 \right\},$$

ki je na afinem delu $z = 1$ unija simetral kvadrantov

$$y = \pm x.$$

Poglejmo si sliko stožnic $\mathcal{S}'$, $\mathcal{S}''$ ter vseh treh izrojenih stožnic.

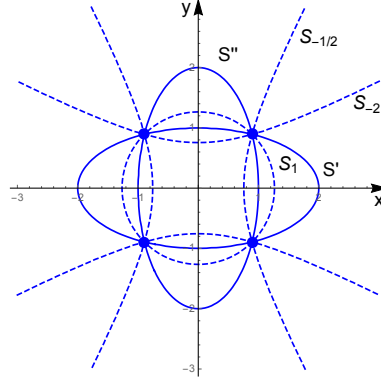


Zanimivo je še pogledati, kako se spreminja oblika stožnice, ko spreminjamo parameter. Če enačimo $t \leftrightarrow [t : 1]$ in $\infty \leftrightarrow [0 : 1]$, dobimo pri dani vrednosti t na afinem delu $z = 1$ stožnico $\mathcal{S}_t$ z enačbo

$$\left(\frac{t}{4} + 1 \right) x^2 + \left(t + \frac{1}{4} \right) y^2 = 1 + t.$$

Stožnica $\mathcal{S}'$ se ujema s stožnico $\mathcal{S}_\infty$, stožnica $\mathcal{S}''$ pa s stožnico $\mathcal{S}_0$. Sedaj bomo opisali, kako se spreminja oblika stožnice, ko t preteče realna števila.

- (1) Pri vrednostih $t \in (-\infty, -4)$ dobimo elipse, ki od zunaj aproksimirajo elipso $\mathcal{S}_\infty$. Ko t narašča od $-\infty$ do -4 , dobimo elipse, ki so čedalje bolj raztegnjene v vodoravni smeri.
- (2) Pri parametru $t = -4$ se elipsa pretrga, nastaneta pa dve vodoravni premici, ki tvorita prvo izrojeno stožnico $\mathcal{S}_{-4}$.
- (3) Za parametre $t \in (-4, -1)$ dobimo navpične hiperbole, katerih asimptote so sprva skoraj vodoravne, nato pa se približujejo k simetralam kvadrantov.
- (4) Pri $t = -1$ dobimo unijo simetral kvadrantov, ki ustrezata drugi izrojeni stožnici $\mathcal{S}_{-1}$.
- (5) Na intervalu $t \in (-1, -\frac{1}{4})$ dobimo vodoravne hiperbole.
- (6) Pri vrednosti $t = -\frac{1}{4}$ se te vodoravne hiperbole izrodijo v dve navpični premici $\mathcal{S}_{-\frac{1}{4}}$.
- (7) Pri vrednostih $t \in (-\frac{1}{4}, \infty)$ pridejo na vrsto elipse, ki se najprej čedalje bolj od zunaj prilegajo elipsi $\mathcal{S}''$, ki ustreza parametru $t = 0$. Do vrednosti $t = 1$ se nato elipse približujejo krožnici, ki poteka skozi štiri skupne točke. Za parametre $t > 1$ pa dobimo elipse, ki čedalje bolj od znotraj aproksimirajo elipso $\mathcal{S}'$.



□

- (5) Poišči stožnico v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$, ki vsebuje točke $T_1 = [0 : 0 : 1]$, $T_2 = [1 : 0 : 1]$, $T_3 = [1 : 1 : 1]$, $T_4 = [0 : 1 : 1]$ in $T_5 = [2 : 3 : 1]$.

Rešitev: Začeli bomo s splošno enačbo stožnice

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = 0.$$

Če v to enačbo vstavimo danih pet točk, dobimo sistem petih enačb za šest neznank. Ker je enačba homogena, lahko eno neničelno neznanko fiksiramo, tako da ostanemo s samo petimi neznankami, ki jih nato dobljeni sistem natanko določa. V našem primeru dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} f &= 0, \\ a + 2d + f &= 0, \\ a + 2b + c + 2d + 2e + f &= 0, \\ c + 2e + f &= 0, \\ 4a + 12b + 9c + 4d + 6e + f &= 0. \end{aligned}$$

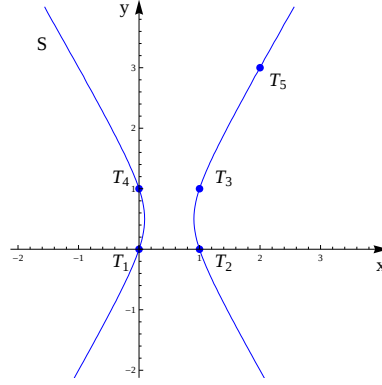
Fiksirajmo recimo $a = 1$. Potem sledi $b = 0$, $c = -1/3$, $d = -1/2$, $e = 1/6$ in $f = 0$, od koder sledi, da je iskana stožnica

$$\mathcal{S} = \left\{ [x : y : z] \mid x^2 - \frac{y^2}{3} - xz + \frac{yz}{3} = 0 \right\}.$$

Zožitev te stožnice na afino ravnino $z = 1$ ima enačbo:

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{y^2}{3} - x + \frac{y}{3} &= 0, \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Gre za hiperbolo s središčem v točki $T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.



□

- (6) Naj bo $\mathcal{S}$ neprazna neizrojena stožnica v $P(\mathbb{R}^3)$ in $\theta_A : P(\mathbb{R}^3) \rightarrow P(\mathbb{R}^3)$ projektivnost. Izračunaj enačbo stožnice $\mathcal{S}' = \theta_A(\mathcal{S})$, če je stožnica $\mathcal{S}$ dana z enačbo $x^T M x = 0$.

Rešitev: Poglejmo si najprej na konkretnem primeru, kako projektivnost preslika stožnico. Vzemimo projektivnost $\theta_A : P(\mathbb{R}^3) \rightarrow P(\mathbb{R}^3)$, ki je porojena z matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

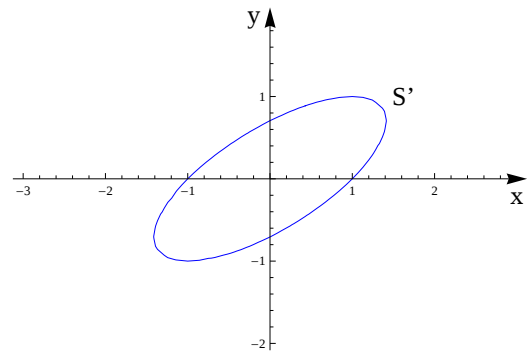
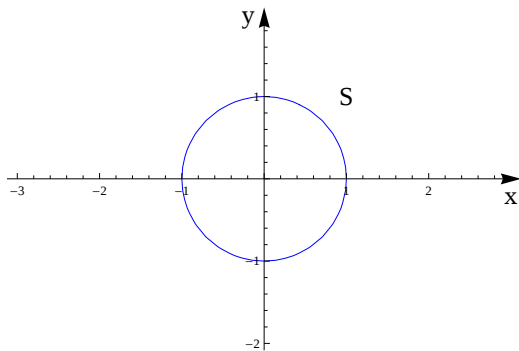
in pogledimo, kam preslika stožnico $\mathcal{S}$, ki je določena za enačbo $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Matrika A določa zamenjavo koordinat

$$\begin{aligned} x' &= x + y, \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned}$$

Ko od tod izrazimo koordinate x , y in z in jih vstavimo v enačbo stožnice $\mathcal{S}$, dobimo enačbo

$$x'^2 - 2x'y' + 2y'^2 - z'^2 = 0,$$

ki določa stožnico $\mathcal{S}'$.



Poglejmo sedaj splošen primer. Recimo, da je stožnica $\mathcal{S}$ določena z enačbo $x^T M x = 0$. Potem velja:

$$\begin{aligned} x^T M x &= 0, \\ x^T A^T A^{-T} M A^{-1} A x &= 0, \\ (Ax)^T (A^{-T} M A^{-1}) (Ax) &= 0. \end{aligned}$$

Na stožnici $\mathcal{S}'$ ležijo točke oblike $x' = Ax$, iz zgornje enačbe pa sledi, da torej stožnici $\mathcal{S}'$ pripada simetrična matrika

$$M' = A^{-T}MA^{-1}.$$

V našem primeru je

$$M' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

To se ujema z izračunom po prejšnji metodi. □