

1. KOLOKVIJ IZ ANALIZE III

26. november 2012

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

1. naloga

(25) Za $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ pišimo $z = re^{i\phi}$ ter $w = se^{i\psi}$, kjer so $r, s > 0$ in $\phi, \psi \in [0, 2\pi)$. Definirajmo

$$d(z, w) = \max \left\{ |r - s|, |e^{i\phi} - e^{i\psi}| \right\}.$$

Dokaži, da d določa metriko na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, in skiciraj krogli $K(i, 1)$ ter $K(10, 7)$.

2. naloga

(25) Naj bo $(M, d) = (\mathcal{C}([0, 1/2]), d_\infty)$ dan metrični prostor in naj bo

$$A(f)(x) = 1 + \int_0^x f(t) dt, \quad f \in M$$

preslikava. Prepričaj se, da (M, d) in A ustrezajo predpostavkam izreka o fiksni točki. Fiksno točko tudi poišči.

3. naloga

(25) Z odvajanjem integrala

$$I(a) = \int_0^1 \frac{\log(1 + ax)}{1 + x^2} dx$$

izračunaj integral

$$\int_0^1 \frac{\log(1 + x) dx}{1 + x^2}.$$

4. naloga

(25) Izračunaj volumen območja, omejenega s ploskvama $z = x^2 + y^2$ in $z = 2(x^2 + y^2 + 1)^{-1}$.

2. KOLOKVIJ IZ ANALIZE III

14. januar 2013

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

1. naloga

Naj bo D pokončni stožec z višino h z osjo vzporedno z osi in naj bo osnovna ploskev O dana z $\{(x, y, 0), x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Naj bo rob valja S orientiran z zunanjo normalo. Izračunaj pretok vektorskega polja $\vec{F} = (yz, xz, xy)$ skozi S , O in $S \setminus O$.

2. naloga

Dano je vektorsko polje $\vec{F} = (yz, xz, xy)$. Ugotovi, ali je potencialno in če je, izračunaj njegov potencial. Naj bo

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1\}$$

orientirana z zunanjo normalo. Izračunaj delo, ki ga sila $\vec{F}$ opravi po

1. poti, ki je rob dela S v 1. oktantu;
2. poti, ki je rob dela S v zgornjem polprostoru;
3. poti, ki je presek S in polravnine $z = 3, x \geq 6\sqrt{3}/5$.

Orientacija je skladna z orientacijo S .

3. naloga

Ali obstaja cela funkcija f , ki zadošča pogoju

1. $f(|z|) = z^2$ za vsak $z \in \mathbb{C}$?
2. $f(z^2) = |z|$ za vsak $z \in \mathbb{C}$?

4. naloga

Naj bosta m, n celi števili. Izračunaj integral

$$\int_{S(0,1)} e^{mz^n} dz.$$

1. IZPIT IZ ANALIZE III

1. februar 2013

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

1. naloga (25)

Naj bo $(M, d) = (\mathcal{C}([1, 3/2]), d_\infty)$ dan metrični prostor in naj bo

$$A(f)(x) = 2 + \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt, \quad f \in M$$

preslikava. Prepričaj se, da (M, d) in A ustrezajo predpostavkam izreka o fiksni točki. Fiksno točko tudi poišči.

2. naloga (25)

Določi konstante a , za katere je integral

$$I(a) = \int_1^\infty \frac{(x-1)^a}{x^2} dx$$

konvergenten. Prevedi ga na funkcijo beta. Pokaži, da je integral soda funkcija parametra a . Izračunaj $I(a)$ za $a = 0, \pm 1/2$.

3. naloga (25)

S prevedbo na kompleksen integral po enotski krožnici izračunaj integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\sqrt{5} + 2\cos\varphi}.$$

4. naloga (25)

Reši diferencialno enačbo

$$y'' + a^2 y = f(x), a > 0$$

pri začetnih pogojih $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ za $f(x) = \sin ax$ in $f(x) = x$.

2. IZPIT IZ ANALIZE III

24. junij 2013

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

1. naloga

Naj bo krivulja C presek ploskev $x + y + z = 0$ ter $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Izberi orientacijo za C ter v skladu z njo izračunaj

$$\int_C z \, dx + x \, dy + y \, dz.$$

2. naloga

Poišči vse pozitivne rešitve enačbe

$$x = \frac{1 + e^{-x} \sin x}{3}.$$

Koliko negativnih rešitev ima enačba?

3. naloga

S pomočjo kompleksne integracije izračunaj

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ix}}{x^2 - 2x + 4} \, dx.$$

4. naloga

Poišči splošno rešitev enačbe

$$y'' + 3y' + 5y = 7e^{9x}.$$

3. IZPIT IZ ANALIZE III

29. avgust 2013

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

1. naloga

Naj bo (M, d) metrični prostor. Na $M \times M$ definiraj predpis

$$d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

Dokaži, da je (M, d^*) omejen metrični prostor.

2. naloga

Naj bo krivulja $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ dobljena tako, da iz točke $(4, -2, 1)$ potujemo (naravnost) proti točki $(11, 5, -4)$, dokler ne opravimo poti dolžine 3. Naj bo hkrati $F(x, y, z) = (10xyz + 3 \sin x, 5x^2z, 5x^2y)$. Ugotovi, ali je polje F potencialno, in izračunaj

$$\int_{\gamma} F \, dr.$$

3. naloga

Izračunaj ploščino in težišče lika v $\mathbb{R}^2$, omejenega s krivuljo $x^2 + y^4 = 1$.

4. naloga

Poišči vsa *kompleksna* števila z , za katera velja $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.