

1. KOLOKVIJ IZ ANALIZE III

2. december 2013

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

1. naloga

Naj bo $f_n(x) = n(1-x)x^n, x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}$, zaporedje zveznih funkcij. (a)(5) S pomočjo limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n + n \ln x$ za $x \in (0, 1)$ pokaži, da $f_n(x)$ po točkah konvergira k 0,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1-x)x^n = 0, \quad x \in [0, 1].$$

(b)(10) Ali zaporedje funkcij $f_n(x)$ konvergira k 0 v metriki d_∞ na $\mathcal{C}[0, 1]$? (c)(10) Ali zaporedje funkcij $f_n(x)$ konvergira k 0 v metriki d_2 na $\mathcal{C}[0, 1]$? (d) (10) Dodatna naloga. Ali zaporedje funkcij $f_n(x)$ konvergira k 0 v metriki d_p za $p = 1/2, 1$ na $\mathcal{C}[0, 1]$? ($d_p(f, g) = (\int_a^b |f - g|^p)^{1/p}$ na $\mathcal{C}[a, b]$).

2. naloga

(25) Poišči rešitev enačbe $e^x = -x$ na 3 decimalke natančno in dokaži, da je ena sama. Najprej pokaži, da rešitev leži na intervalu $(-\infty, -0.56]$.

3. naloga

(25) Določi težišče homogenega stožca, ki ima polmer osnovne ploskve 5 in višino 10.

4. naloga

(25) Izračunaj prostornino telesa $(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq x$, ki leži v zgornjem polprostoru.

2. KOLOKVIJ IZ ANALIZE III

13. januar 2014

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

1. naloga

(10) Naj bo V pokončni stožec z osnovno ploskvijo $\{(x, y, 0), x^2 + y^2 < 25\}$ in višino 10. Določi pretok vektorskega polja $(x^2, y^2 + x, 3z)$ skozi njegovo celotno površino. (5) Posebej določi še pretok skozi plašč. (10) Z uporabo Stokesovega izreka izračunaj delo, ki ga polje opravi na poti c , ki je rob osnovne ploskve. Orientacijo poti izberi sam in jo predstavi na sliki.

2. naloga

(15) Ugotovi, ali je polje $\mathbf{F} = (y + z + yz, x + z + xz, x + y + xy)$ potencialno in če je, izračunaj njegov potencial. (10) Izračunaj še integral $\int_{\gamma} \mathbf{F} d\mathbf{s}$, če je pot γ dana z $\gamma(t) = (t^7, e^{2t-2}, \sin(\pi t))$, $t \in [0, 1]$.

3. naloga

(15) Poišči singularne točke funkcije

$$f(z) = \frac{\sin z}{1 - e^{z^2}}$$

Določi glavni del razvoja funkcije f v Laurentovo vrsto okoli 0 in določi $\text{Res}(f, 0)$. (10) Izračunaj $\int_{\gamma} f(z) dz$, kjer je γ parametrizirana z $\gamma(t) = e^{2it} + 1/2$, $t \in [0, 2\pi]$. Nasvet: najprej določi stopnjo pola.

4. naloga

(25) Reši diferencialno enačbo $y'' - 2y' + 2y = e^x$ pri pogojih $y(0) = y'(0) = 0$.