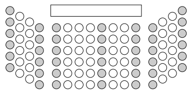
1	
2	
3	
4	
Σ	

Analiza 3: 2. kolokvij

20. 1. 2014

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!



Sedež (2.01)

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga (25 točk)

Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$3x^2y^2y'' + 6x^2yy'^2 - 9xy'y^2 + 5y^3 = 0.$$

Nasvet: oglej si funkcijo $z = y^\lambda$.

Pišimo $y = z^\lambda$. Tedaj je

$$y' = \lambda z^{\lambda-1}z' \qquad \text{in} \qquad y'' = \lambda(\lambda-1)z^{\lambda-2}z'^2 + \lambda z^{\lambda-1}z''.$$

Pravkar izračunano vstavimo v enačbo in dobimo

$$3\lambda x^2z^{3\lambda-1}z'' + 3\lambda(3\lambda-1)x^2z^{3\lambda-2}z'^2 - 9\lambda xz^{3\lambda-1}z' + 5z^{3\lambda} = 0.$$

V primeru, ko je $\lambda = \frac{1}{3}$, dobimo Cauchy-Eulerjevo enačbo

$$x^2z'' - 3xz' + 5z = 0.$$

Rešujemo jo z nastavkom $z = x^\mu$. Karakteristični polinom je enak

$$\mu(\mu-1) - 3\mu + 5 = \mu^2 - 4\mu + 5$$

z ničlama $\mu_{1,2} = 2 \pm i$. Splošna rešitev Cauchy-Eulerjeve enačbe je torej enaka

$$z = \tilde{A}x^{2+i} + \tilde{B}x^{2-i} = x^2(\tilde{A}x^i + \tilde{B}x^{-i}) = x^2(A\cos(\ln x) + B\sin(\ln(x)).$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe iz naloge je

$$y = \sqrt[3]{x^2(A\cos(\ln x) + B\sin(\ln(x))}.$$

2. naloga (25 točk)

Poišči tisto rešitev sistema diferencialnih enačb

$$\dot{x} = \frac{-tx}{x^2+y^2} \qquad \text{in} \qquad \dot{y} = \frac{-ty}{x^2+y^2},$$

ki zadošča $x(1) = 1$ in $y(1) = 2$.

Množimo prvo enačbo z x, drugo z y, da dobimo

$$x\dot{x} + y\dot{y} = -t.$$

Z integracijo dobimo

$$x^2 + y^2 = -t^2 + C.$$

Opazimo, da velja

$$\frac{\dot{x}}{x} - \frac{\dot{y}}{y} = 0.$$

Odtod sledi $x = Dy$. Upoštvajmo začetna pogoja in imamo $D = \frac{1}{2}$ in $C = 6$. Odtod sledi

$$x = \sqrt{\frac{6-t^2}{5}} \qquad \text{in} \qquad y = 2\sqrt{\frac{6-t^2}{5}}.$$

Nalogo bi lahko rešili tudi drugače. Eden od prvih integralov je enak $x = Dy$. Vstavimo v prvo enačbo sistema in imamo

$$D\dot{y} = \frac{-Dty}{(1+D^2)y^2}$$

oziroma

$$y\dot{y} = -\frac{tdt}{1+D^2}.$$

Z integracijo dobimo

$$y^2 = -\frac{t^2}{1+D^2} + E$$

in zato

$$x^2 = -\frac{D^2}{1+D^2}t^2 + ED^2.$$

Z upoštevanjem začetnih pogojev dobimo zgornjo rešitev.

3. naloga (30 točk)

Naj bo $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija razreda $\mathcal{C}^2$. Dokaži, da sta pripadajoči Euler-Lagrangeevi enačbi funkcionalov

$$I_1[y] = \int_a^b L(x, y, y') \qquad \text{in} \qquad I_2[y] = \int_a^b \left(L(x, y, y') + \frac{d}{dx} G(x, y) \right) dx.$$

enaki. Poišči vsaj eno ekstremalo funkcionala

$$I[y] = \int_1^2 \left(\frac{1}{2} x y'^2 - y + e^{xy}(y + xy') \right) dx,$$

ki zadošča $y(2) = -1$.

Euler-Lagrangeeva enačba funkcionala I_1 je enaka

$$L_y = \frac{d}{dx} L_{y'},$$

Euler-Lagrangeeva enačba funkcionala I_2 pa je enaka

$$L_y + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{d}{dx} G(x, y) \right) = \frac{d}{dx} \left(L_{y'} + \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{d}{dx} G(x, y) \right) \right). \tag{1}$$

Ker je $\frac{d}{dx} G(x, y) = G_x + G_y y'$, je Euler-Lagrangeeva enačba funkcionala I_2 enaka

$$L_y + \frac{\partial}{\partial y} \left(G_x + G_y y' \right) = \frac{d}{dx} \left(L_{y'} + \frac{\partial}{\partial y'} \left(G_x + G_y y' \right) \right)$$

oziroma

$$L_y + G_{xy} + G_{yy} y' = \frac{d}{dx} L_{y'} + \frac{d}{dx} G_y.$$

Ker je $\frac{d}{dx} G_y = G_{yx} + G_{yy} y'$ in ker je $G_{xy} = G_{yx}$ (zakaj), sta Euler-Lagnrangeevi enačbi funkcionalov I_1 in I_2 res enaki.

Konkretni primer bo sledil direktno iz pravkar dokazanega (ali pa če napišemo Euler-Lagrangeevo enačbo za I_2 in jo rešimo), saj je $e^{xy}(y + xy') = \frac{d}{dx}(e^{xy})$. Torej, iščemo ekstremalo funkcionala

$$I_1[y] = \int_1^2 (\frac{1}{2} x y'^2 - y) dx,$$

ki ustreza $y(2) = -2$. Euler-Lagrangeeva enačba funkcionala I_1 se glasi

$$-1 = \frac{d}{dx}(xy').$$

Vidimo, da lahko enačbo direktno integriramo. Dobimo $xy' + x = C$ oziroma $y' = \frac{C}{x} - 1$. Splošna rešitev je enaka $y = C \ln x - x + D$. V krajišču $x = 1$ imamo prost geometrijski pogoj, kar pomeni, da ekstremala zadošča $L_{y'}(1) = (xy' + xe^{xy})(1) = 0$. Torej je

$$y'(1) + e^{y(1)} = 0$$

oziroma $C + e^{D-1} = 0$. V $x = 2$ velja $-1 = C \ln 2 - 2 + D$ oziroma $C \ln 2 + D = 1$. Eno od iskanih rešitev sistema enačb za C in D uganemo. Dobimo $C = 0$ in $D = 1$. Ena od ekstremal je torej enaka $y = 1 - x$.

4. naloga (20 točk)

Naj bo $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n,n}$ realna konstantna matrika velikosti $n \times n$ in

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{22}x_2 \\ \vdots \\ a_{nn}x_n \end{bmatrix}$$

linearen homogen sistem diferencialnih enačb. Določi potreben in zadosten pogoj, da za poljubno rešitev $\vec{x}$ zgornjega sistema $\lim_{t\to\infty} \vec{x}$ obstaja. V primeru, ko $\lim_{t\to\infty} \vec{x}(t)$ obstaja, določi splošno rešitev zgornjega sistema.

Sistem diferencialnih enačb lahko prepišemo v sistem $\dot{\vec{x}} = B\vec{x}$, kjer je

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & ; \quad i \neq j \\ 0 & ; \quad i = j \end{cases} .$$

Predpostavimo, da obstaja $\lim_{t\to\infty} \vec{x}(t)$ za poljubno rešitev sistema iz naloge in naj bo $B = PJP^{-1}$ Jordanska forma matrike B.

Ker limita iz naloge obstaja za poljubno rešitev, ima vsaka lastna vrednost matrike B nepozitiven realni del. Ker je sled matrike B enaka 0, je realni del vsake lastne vrednosti enak 0. Torej so lastne vrednosti matrike B ničelne in/ali imaginarne. Naj bo sedaj $\lambda = i\mu$ poljubna imaginarna lastna vrednost matrike B in v_1, v_2 zaporedoma lastna vektorja matrike B glede na λ in $\overline{\lambda}$. Tedaj $\mathrm{Re}(v_1 + v_2)\cos(\mu t)$ in $\mathrm{Im}(v_1 + v_2)\sin(\mu t)$ tudi rešita sistem. Odtod pa sledi, da limita iz naloge ne more obstajati za poljubno rešitev sistema. Torej je matrika B nilpotentna. Če ni diagonalizabilna, ima vsaj eno netrivialno Jordansko kletko in limita zopet ne more obstajati. Torej je B nilpotentna in diagonalizabilna, kar pomeni, da je $B = 0$ in zato je A diagonalna matrika. V tem primeru je splošni vektor konstant splošna rešitev sistema. Velja tudi obratno. Če je matrika A diagonalna, se sistem iz naloge glasi $\dot{\vec{x}} = 0$. Splošna rešitev tega sistema je splošni vektor konstant in zadošča pogoju naloge.