

LINEARNA ALGEBRA 2020/21
22. VAJE: 31. 3. 2021

1. Naj bo V vektorski prostor in P neničeln endomorfizem, z minimalnim polinomom $x^2 - x$.

Pokaži, da je $V = \operatorname{im} P \oplus \ker P$.

2. Zapiši vse možne Jordanove forme matrike, če sta karakteristični in minimalni polinom:

a) $p(\lambda) = (\lambda - 1)^3(\lambda - 2)^2, m(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2$.

b) $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^4, m(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$.

c) $p(\lambda) = (\lambda^2 - 4\lambda + 3)^3(\lambda - 1), m(\lambda) = (\lambda^2 - 4\lambda + 3)^2$ in ima preslikava 5 LN lastnih vektorjev.

3. Poišči Jordanovo formo in prehodno matriko za

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Poišči Jordanovo formo in prehodno matriko za

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -10 & -7 \\ -3 & 17 & 12 \end{bmatrix}$$

ter izračunaj $\exp A$.

1. Naj bo V vektorski prostor in P neničeln endomorfizem, z minimalnim polinomom $x^2 - x$.

Pokaži, da je $V = \text{im } P \oplus \ker P$.

$$P^2 - P = 0$$

$$\textcircled{1} V = \text{im } P + \ker P \quad \textcircled{2} \text{im } P \cap \ker P = \{0\}$$

$$\textcircled{1} \quad v = Pv + (v - Pv)$$

$$Pv \in \text{im } P, \quad v - Pv \in \ker P$$

$$P(v - Pv) = (P - P^2)v = 0v = 0$$

$$\textcircled{2} \quad x \in \text{im } P \cap \ker P$$

$$x = Py \quad Px = 0$$

$$0 = Px = P^2y = Py = x \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

Tak P imenujemo projektor.

P je podoben $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{bmatrix}$ in $\text{rang}(P) = \text{tr}(P)$.

Jordanove forme

Vsaka $A \in M_n(\mathbb{C})$ je podobna matriki v Jordanovi formi

$$\begin{bmatrix} J_{\lambda_1} & & \\ & J_{\lambda_2} & \\ & & \ddots \\ & & & J_{\lambda_n} \end{bmatrix}, \quad \text{kjer je} \quad J_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} \text{ Jordanova kletka.}$$

Jordanova forma je evolutivna, do vrstnega reda kletke nastane.

2. Zapiši vse možne Jordanove forme matrike, če sta karakteristični in minimalni polinom:

a) $p(\lambda) = -(\lambda - 1)^3(\lambda - 2)^2, m(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2$.

b) $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^4, m(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$.

c) $p(\lambda) = (\lambda^2 - 4\lambda + 3)^3(\lambda - 1), m(\lambda) = (\lambda^2 - 4\lambda + 3)^2$ in ima preslikava 5 LN lastnih vektorjev.

a) $p_A(\lambda) = -(\lambda - 1)^3(\lambda - 2)^2$ $m_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2 \rightarrow$ velikost največje Jordanove celice, ki pripada lastni vrednosti 2.

$$J_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 2 & 1 \\ & & & & 2 \end{bmatrix}$$

b) (t uaj z napačno prepisanimi navodili)
 $p_B(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2$ $m_B(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$

$$J_B = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

(z dejanskimi navodili)

$$p_B(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^4$$

$$J_B = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & 1 & \\ & & & 2 & 1 \\ & & & & 2 \end{bmatrix}$$

$$J_B = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & 1 & \\ & & & 2 & 1 \\ & & & & 2 \end{bmatrix}$$

c) $p_C = (\lambda - 1)^4(\lambda - 3)^3$ $m_C = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2$ (uajah 5)

(uajah z napačno prepisanimi navodili)

kandidata (če ne upoštevamo št. lin. neodvisnih lastnih vektorjev)

ima 4 LN v. $\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 3 \end{bmatrix}$ $\rightarrow$ ima 5 linearno neodvisnih lastnih vektorjev

- št. kletk = št. linearno neodvisnih vektorjev

$$= \dim \ker \left(\prod_{\substack{\lambda \\ \text{lastna vrednost } A}} (A - \lambda I) \right) = \sum_{\substack{\lambda \\ \text{lastna vrednost } A}} \dim \ker (A - \lambda I)$$
- št. kletk za lastno vrednost $\lambda = \dim \ker (A - \lambda I)$
- število kletk za λ , k_i so večje od j $k-1$

$$\dim \ker (A - \lambda I)^k - \dim \ker (A - \lambda I)^{k-1}$$
- $w_\lambda = \prod_i (\lambda - \lambda_i)^{k_i}$ k_i - velikost največje kletke za λ_i

Računanje Jordanove forme

① Če ne vabimo prehodnih matrik

- Izračunamo karakteristični polinom in njegove ničle
- Za vsako lastno vrednost λ izračunamo $\dim(\ker(A - \lambda I)^k)$ za $k=1, 2, \dots$ dokler ne pridemo do $\dim(\ker(A - \lambda I)^k) = \dim(\ker(A - \lambda I)^{k-1})$ (do dimenzije korenskega podprostora).

// št kletk dimenzije $m = \dim \ker(A - \lambda I)^m - \dim \ker(A - \lambda I)^{m-1}$

② Če potrebujemo prehodno matriko

- izračunamo lastne vrednosti (kor. polinom ...)

- za vsako lastno vrednost λ izračunamo bazo $V_k = \ker(A - \lambda I)^k$, $k=1,2,\dots$ dokler se prostor ne neha večati. Naj bo $V_m = V_{m+1}$ in B_i baza V_i .

- Bazo B_{m-1} dopolnimo do baze V_m in vzamemo dodatne vektore

$$\{b_1, b_2, b_3, \dots\} = \tilde{B}_m - \text{dodatni vektorji}$$

Označimo $\tilde{A} = A - \lambda I$. Preslikamo $b_i \rightarrow \tilde{A}b_i \in V_{m-1}$
 $\tilde{B}_m \rightarrow \tilde{A}\tilde{B}_m$

- $B_{m-2} \cup \tilde{A}\tilde{B}_m$ dopolnimo do baze V_{m-1}
↑ dodatni elementi

$$\{c_1, c_2, \dots\} \cup \tilde{A}\tilde{B}_m = \tilde{B}_{m-1}$$

Preslikamo $\tilde{B}_{m-1} \rightarrow \tilde{A}\tilde{B}_{m-1}$ (z $\tilde{A}$ preslikamo vsak vektor posebej)

- $B_{m-3} \cup \tilde{A} \tilde{B}_{m-1}$ dopolnimo do baze V_{m-2}

$$\{d_1, d_2, \dots\} \cup \tilde{A} \tilde{B}_{m-1} = \tilde{B}_{m-2}$$

- ...

- Ko končno dobimo Jordanove verige

$$a_1 \rightarrow \tilde{A} a_1 \rightarrow \tilde{A}^2 a_1 \rightarrow \tilde{A}^3 a_1 \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{A}^{m-1} a_1 \rightarrow 0$$

$$a_2 \rightarrow \tilde{A} a_2 \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{A}^{m-1} a_2 \rightarrow 0$$

$$b_1 \rightarrow \tilde{A} b_1 \rightarrow \tilde{A}^2 b_1 \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{A}^{m-2} b_1 \rightarrow 0$$

$$c_1 \rightarrow \tilde{A} c_1 \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{A}^{m-3} c_1 \rightarrow 0$$

- Verige dolžine k pripada kletka velikosti k

$$\left(\tilde{A}(\tilde{A}^{k-1} a_1) = \lambda \tilde{A}^{k-1} a_1 + \tilde{A}^{k-2} a_1 \right)$$

- Verige (od vseh l.v.) zložimo v prehodno matriko

$$P = \left[\dots \left| \tilde{A}^{m-1} a_1 \right| \left| \tilde{A}^{m-2} a_1 \right| \left| \tilde{A}^{m-3} a_1 \right| \dots \left| a_1 \right| \left| \tilde{A}^{m-1} a_2 \right| \dots \left| a_2 \right| \dots \right]$$

$$AP = P \begin{bmatrix} \square & & \\ & \square & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

pripadajoča kletka.

3. Poišči Jordanovo formo in prehodno matriko za

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 2)^4$$

$$A - 2\lambda = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(A - 2\lambda)^2 = 0$$

$$\ker(A - 2\lambda)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ Restev } s \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dopełniamy do bazy } \mathbb{C}^4 \text{ z npr. } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - 2I) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (A - 2I) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P_B(\lambda) = (1 - \lambda)^5$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(B-1)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(B-1)^3 = 0$$

ker $B-1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\sim]{\substack{-1 \\ -2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Na vrhah napake, hi ne vpliva na rezultat.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

baza $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\ker (B-1)^2$ baza

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\ker (B-1)^3 = \mathbb{C}^5$$

$\mathbb{Z} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (je dopolnimo z čim drugim, dobimo drugačno prehodno matriko)
dopolnimo bazo $\ker (B-1)^2$ do baze $\mathbb{C}^5$

$$(B-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dopolnimo do baze } \ker (B-1)^2$$

$\mathbb{Z}$ npr. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$(B^{-1}) \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(B^{-1}) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dobawo zero

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} B P = J_B$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p_C = (1-\lambda)^4(2-\lambda)$$

$$\ker(C-2I)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 \leftrightarrow R_2 \\ R_4 \leftrightarrow R_3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{baza} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C-I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(C-I)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(C-I)^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \text{losťi vektor za 2} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$(C-I)^3 = (C-I)^4 \quad \left(\begin{array}{l} \text{Ponavadi se to ne zgodi!} \\ \text{To je to zato, ker je } 2-1=1 \end{array} \right)$$

Edna druga
krajša vrednost

$$\ker(C-I)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Baza: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\ker(C-I)^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Baza: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\ker (C-I)^3$$

$$[400000]$$

Baza

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Baza $\ker (C-I)^2$ do polinomu π

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ do baze } \ker (C-I)^3$$

$$(C-I) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ je baza } \ker(C-I)^2$$

(ne dopolnimo nič)

$$(C-I) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dopolnimo do baze } \ker(C-I)$$

z $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Dobimo verigi

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \left| \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right.$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} C P = J_c$$