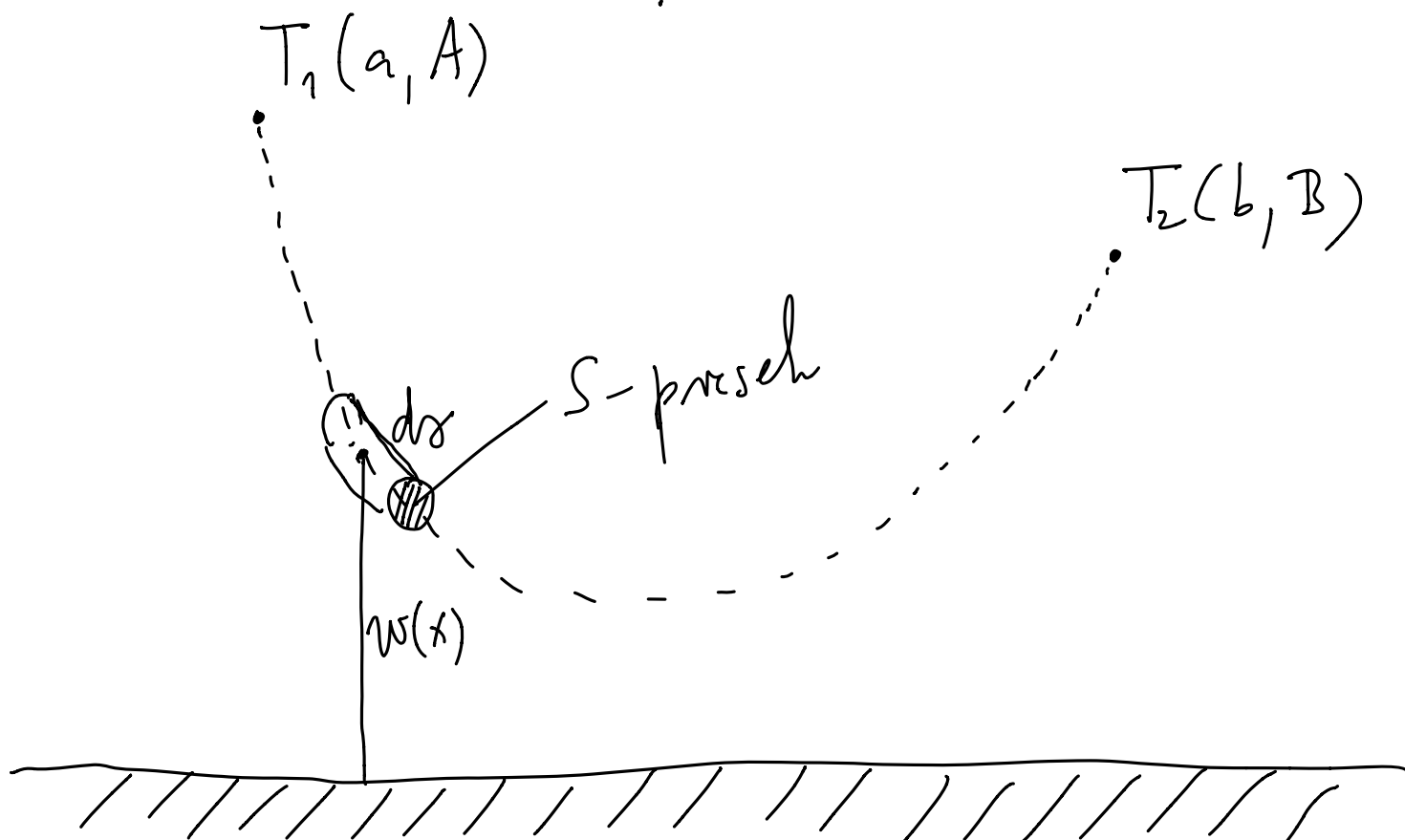


Izredna verižnica

Gilho tanho nit (ρ) obisimo v točkah $T_1(a, A)$ in $T_2(b, B)$. Dolžina niti je l . Tanimo mas oblika, ki nastane pod vplivom sile teže.



Naloga zahteva poiskati tako obliko niti, da je potencialna energija minimalna.

Potencialno energijo del čeha moramo izračunati takole:

$$dW = g w(x) dm = g w(x) \underbrace{\rho dV}_{dm = \rho dV \text{ konstanta}}$$

$$= g \rho w(x) S dx = \underbrace{g \rho S}_{\text{konstanta}} w(x) \sqrt{1 + w'(x)^2} dx$$

$$\Rightarrow d\tilde{W} = w(x) \sqrt{1 + w'(x)^2} dx \Rightarrow$$

$$W = \int_a^b w(x) \sqrt{1 + w'(x)^2} dx =: \phi(w).$$

Pogoji so: $w(a) = A,$

$$w(b) = B,$$

$$\int_a^b \sqrt{1 + w'(x)^2} dx = l.$$

Iščemo minimum funkcionala ϕ pri danih pogojih.

Minimiziramo $\phi: \mathcal{E}^1([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ variacijski račun.

Definiramo funkcional

$$L(w, w') = (w - \lambda) \sqrt{1 + w'^2},$$

kjer je λ neznan multipikator.

Iz variacijskega računa dobimo pogoj

za minimizacijo funkcionala

$$\int_a^b \underbrace{(w(x) - \lambda) \sqrt{1 + w'(x)^2}}_{L(w, w')} dx:$$

Euler-Lagrangeova enačba:

$$\frac{\partial L}{\partial w}(w, w') - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial w'}(w, w') \right) = 0.$$

Če L ni eksplicitno odvisna od spremenljivke x , se E.-L. enačba

po možnosti:

$$L(w, w') - w' \frac{\partial L}{\partial w'}(w, w') = C.$$

↑
konstanta

V našem primeru dobimo

$$(w(x) - \lambda) \sqrt{1 + w'(x)^2} - w'(x)(w(x) - \lambda).$$

$$\frac{1}{\cancel{2\sqrt{1 + w'(x)^2}}} \cdot \cancel{2w'(x)} = C / \sqrt{1 + w'(x)^2}$$

$$(w(x) - \lambda)(1 + w'(x)^2) - w'(x)^2(w(x) - \lambda)$$

$$= C \sqrt{1 + w'(x)^2}$$

$$\cancel{w(x) + w'(x)^2} \cancel{w(x) - \lambda} - \cancel{\lambda w'(x)^2} - \cancel{w'(x)^2 w(x)} + \cancel{\lambda w'(x)^2} = C \sqrt{1 + w'(x)^2} \Rightarrow$$

$$w(x) - \lambda = C \sqrt{1 + w'(x)^2}$$

Dobili smo (nelinearno) diferencialno enačbo 1. reda.

Rešujemo p z nastankom $w' = \sinh p$!

Od tod dobimo:

$$w(x) - \lambda = C \sqrt{1 + \sinh^2 p}$$

$$= C \cosh p \quad / \text{diferenciramo} \\ \text{glede na } p$$

$$\cancel{\sinh p} dx = C \cancel{\sinh p} dp$$

$$x = Cp + D, \quad D \text{ nova konstanta}$$

Torej ji

$$w(x) = \lambda + C \cosh\left(\frac{x-D}{C}\right).$$

Iz zadnje enačbe sledi, da ji

$$w'(x) = \sinh\left(\frac{x-D}{C}\right), \quad \text{zato ji}$$

$$\sqrt{1 + w'(x)^2} = \cosh \frac{x-D}{C} \quad \text{ter}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + w'(x)^2} dx = \int_a^b \cosh\left(\frac{x-D}{C}\right) dx$$

$$= C \sinh\left(\frac{x-D}{c}\right) \Big|_a^b$$

$$= \left[C \sinh\left(\frac{b-D}{c}\right) - C \sinh\left(\frac{a-D}{c}\right) \right] = l$$

Ostali dve enačbi dobimo iz

$$w(a) = A \text{ in } w(b) = B, \text{ torej}$$

$$w(a) = \lambda + C \cosh\left(\frac{a-D}{c}\right) = A$$

$$w(b) = \lambda + C \cosh\left(\frac{b-D}{c}\right) = B$$

Sledi sistem treh (nelinearnih) enačb za λ , C in D .

Uvedemo dve novi merilni

$$u = \frac{a-D}{c}$$

$$v = \frac{b-D}{c} \Rightarrow$$

$$Cu = a - D$$

$$Cv = b - D$$

$\Downarrow$

$$\text{Tako dobimo sistem} \quad \left| \begin{array}{l} b-a = Cv - Cu \\ C = \frac{b-a}{v-u} \end{array} \right.$$

$$\frac{A}{c} = \frac{\lambda}{c} + \cosh u$$

$$\frac{B}{c} = \frac{\lambda}{c} + \cosh v$$

$$\frac{l}{c} = \sinh v - \sinh u$$

Odštejemo prvo enačbo od druge:

$$\frac{B-A}{c} = \cosh v - \cosh u$$

$$\frac{B-A}{b-a} = \frac{\cosh v - \cosh u}{v-u}$$

ter upoštevamo še tretjo enačbo

$$\frac{l}{b-a} = \frac{\sinh v - \sinh u}{v-u}$$

Dobili smo (poenostavljen) sistem dveh enačb za u in v .

Uporabimo formule za hiperbolične funkcije:

$$\frac{B-A}{b-a} = \frac{\sinh \frac{v+u}{2} \sinh \frac{v-u}{2}}{\frac{v-u}{2}}$$

$$\frac{l}{b-a} = \frac{\cosh \frac{v+u}{2} \sinh \frac{v-u}{2}}{\frac{v-u}{2}}$$

Z deljenjem dobimo

$$\frac{B-A}{l} = \tanh \frac{v+u}{2}$$

Torej je $\boxed{\frac{v+u}{2} = \operatorname{arctanh} \frac{B-A}{l}}$.

Računamo:

$$\sinh \frac{v+u}{2} = \frac{\tanh \frac{v+u}{2}}{\sqrt{1 - \tanh^2 \frac{v+u}{2}}}$$

$$= \frac{B-A}{l} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{B-A}{l}\right)^2}}$$

5 slednjim in 2 enačbo

$$\frac{B-A}{b-a} = \frac{\sinh \frac{v+a}{2} \sinh \frac{v-u}{2}}{\frac{v-u}{2}} \quad \text{pridemo}$$

do

$$\frac{\cancel{B-A}}{b-a} = \frac{\cancel{B-A}}{l} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{B-A}{l}\right)^2}} \frac{\sinh \frac{v-u}{2}}{\frac{v-u}{2}}$$

$$\sinh \frac{v-u}{2} = \rho \frac{v-u}{2}, \quad \text{kjer je}$$

$$\rho = \frac{l}{b-a} \sqrt{1 - \left(\frac{B-A}{l}\right)^2}.$$

Rešujemo torej enačbo

$$\boxed{\sinh z = \rho z}, \quad z = \frac{v-u}{2}.$$

Uporabimo lahko metodo ($z = g(z)$)

navadne iteracije.

Imamo dve možnosti:

$$① \quad z = \frac{1}{\rho} \sinh z,$$

$$② \quad z = a \sinh(\rho z).$$

Uporabimo iteracijo $z_{k+1} = a \sinh(\rho z_k)$,
to izberemo.

Če konvergira, smo dobili $z^* = \lim_{k \rightarrow \infty} z_k$

$= \frac{v-u}{2}$. Od tod skupaj z

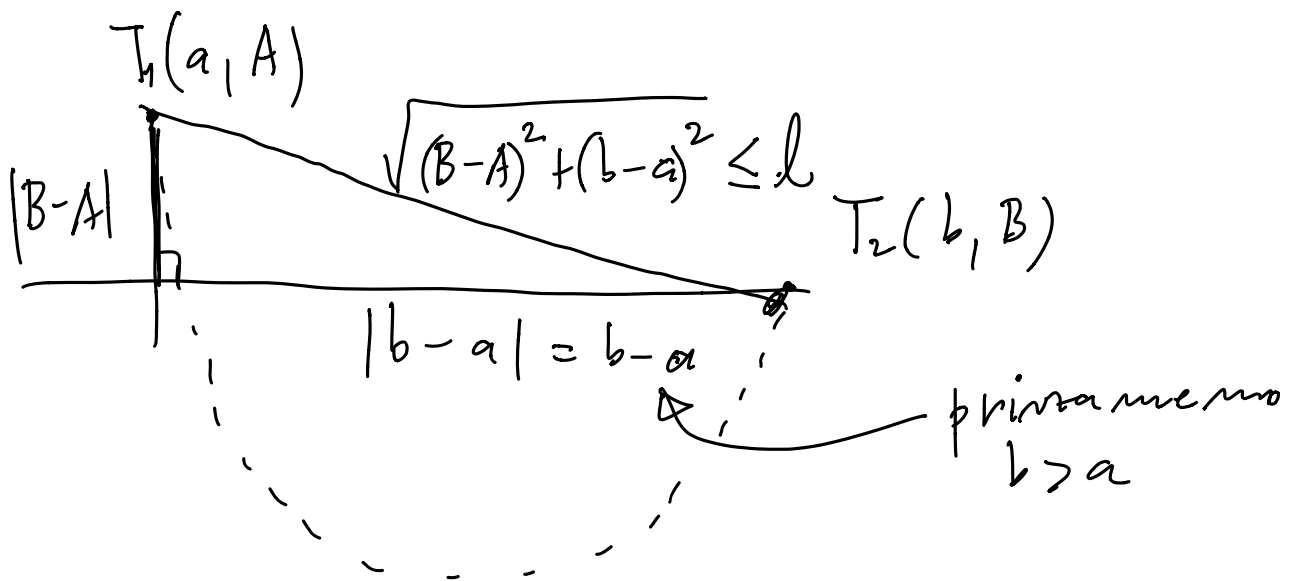
$\frac{v+u}{2}$ dobimo u in v ter posledično
 C in D .

Analiza konvergence iteracije

$$z_{k+1} = \underbrace{a \sinh(\rho z_k)}_{g(z) = a \sinh(\rho z)}, \text{ to izberemo.}$$

Najprej opazimo, da je $\rho > 1$:

$$\rho = \frac{l}{b-a} \sqrt{1 - \left(\frac{B-A}{l}\right)^2}$$



$$l \geq \sqrt{(B-A)^2 + (b-a)^2}$$

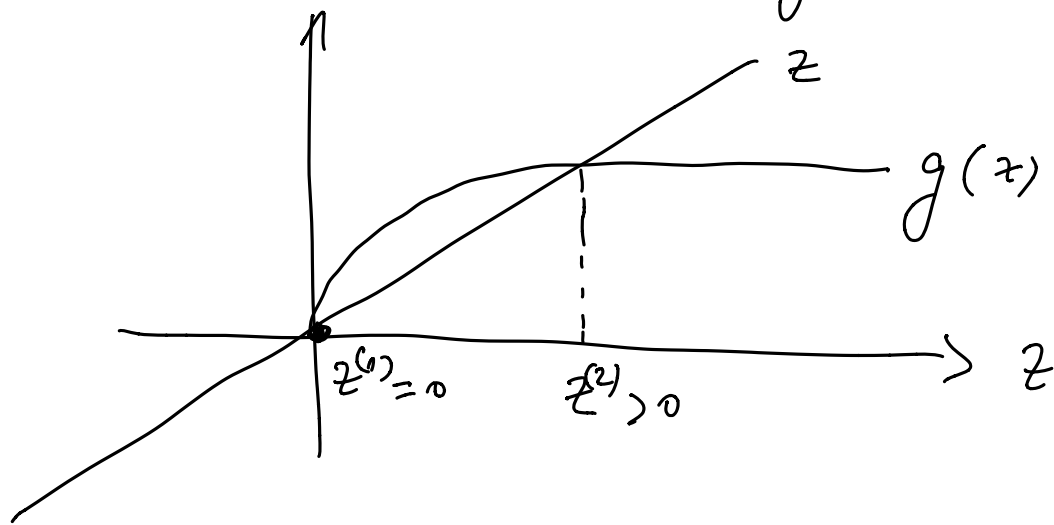
$$\rho = \frac{\cancel{l}}{b-a} \sqrt{l^2 - (B-A)^2} \frac{1}{\cancel{l}} = \frac{\sqrt{l^2 - (B-A)^2}}{b-a}$$

$$|x| \sqrt{(b-a)^2 + (B-A)^2} \leq l \Rightarrow b-a \leq \sqrt{l^2 - (B-A)^2},$$

foref $\rho \geq 1$.

Kev $\rho \geq 1$ ($\rho > 1$, cu $l > d(T_1, T_2)$),

ima enačba $z = g(z)$ dve rešitvi:



Preveriti moramo, da je $|g'(z^{(2)})| < 1$.

Označimo $\alpha = z^{(2)}$.

Direktno izračunamo, da je

$$g'(z) = \frac{\rho}{\sqrt{1 + \rho^2 z^2}}$$

Od tod takoj sledi, da je $z^{(1)} = 0$ odlojna.

Ker je α rešitev enačbe $\alpha = \operatorname{arsinh}(\rho\alpha)$,

$$\text{je } \rho = \frac{\sinh \alpha}{\alpha}.$$

Iz nekega računanja dobimo

$$g'(x) = \frac{\rho}{\sqrt{1 + \rho^2 x^2}} = \frac{\tanh x}{x}$$

Videti moramo, da je $g'(x) < 1$,

oziroma $\tanh x < x$.

Definiramo $f(x) = \tanh x - x$.

$f(0) = 0$ in dovolj je videti, da je

$$f'(x) < 0.$$

$$\text{Toda } f'(x) = -\tanh^2 x < 0. \quad \square$$