

Teorija mere: 1. kolokvij

26. 11. 2015

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 110 točk. Vse odgovore dobro utemelji. Veliko uspeha!

Ime in priimek _____

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Družina podmnožic $\mathcal{A}$ množice celih števil $\mathbb{Z}$ je definirana kot

$$\mathcal{A} = \{E \subseteq \mathbb{Z} : \text{za vsak } n \in \mathbb{N} \text{ je } 2n \in E \Leftrightarrow 2n + 1 \in E\}.$$

- a) (10 točk) Pokaži, da je $\mathcal{A}$ σ -algebra na $\mathbb{Z}$.
- b) (5 točk) Ugotovi, katere od množic $\{0\}$, $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$ in $\{2, 4\}$ so merljive?
- c) (10 točk) Funkcija $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ je podana s predpisom $f(n) = n - 2$. Obravnavaj merljivost funkcij $f, f^{-1} : (\mathbb{Z}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{Z}, \mathcal{A})$.

2. naloga (25 točk)

Ali obstaja taka Borelova mera μ , definirana na kvadratu $[0, 1] \times [0, 1]$, da za vse pravokotnike oblike $[0, a] \times [0, b]$, kjer je $0 < a, b < 1$, velja

$$\mu([0, a] \times [0, b]) = \max\{a, b\}?$$

Nasvet: Koliko bi morala biti mera pravokotnika oblike $[0, a] \times [c, b]$, če je $a > b$ in $0 < c \leq b$?

3. naloga (25 točk)

Na Borelovi σ -algebri $B_{\mathbb{R}}$ realne osi je definirana mera μ s predpisom

$$\mu(E) = \delta_0(E) + m(E \cap [1/2, 1]).$$

Definirajmo zaporedji funkcij $f_n = \sqrt{n}\chi_{[0, \frac{1}{n}]}$ in $g_n = \sqrt{n}\chi_{[\frac{n-1}{n}, 1]}$. Obravnavaj konvergenči $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ in $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

- a) skoraj povsod
- b) po meri
- c) skoraj enakomerno.

4. naloga (35 točk)

Naj bo C Cantorjeva množica.

a) (7 točk) Dokaži, da je C natanko množica vseh $x \in [0, 1]$, ki se lahko zapišejo v obliki

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}, \quad \text{kjer za vsak } n \in \mathbb{N} \text{ velja } a_n \in \{0, 2\}.$$

b) (10 točk) Dokaži, da je $C + C = [0, 2]$, kjer je $C + C = \{x + y : x, y \in C\}$.

c) (18 točk) Dokaži, da obstaja algebraična baza vektorskega prostora $\mathbb{R}$ nad obsegom $\mathbb{Q}$, ki je Lebesgueovo merljiva množica. **Opomba:** Izkaže se, da nobena algebraična baza za $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ ni Borelovo merljiva.