



 Sedež (2.02)

1
2
3
4
Σ



 Vpisna številka

2. naloga (25 točk)

Naj bo f taka nenegativna merljiva funkcija na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A}, \mu)$ s pozitivno mero, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\int_X f^n d\mu \leq \frac{1}{n^2}.$$

Dokaži, da je $0 \leq f < 1$ skoraj povsod in dokaži, da je $\frac{f}{1-f} \in L^1(\mu)$.

Nasvet: Integriraj funkcijsko vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} f^n$. Ali je dobljeni integral neskončen?

3. naloga (25 točk)

Naj bosta μ_1 in ν_1 σ -končni meri na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$ in naj bosta μ_2 in ν_2 σ -končni meri na merljivem prostoru $(Y, \mathcal{B})$. Naj velja $\nu_1 \ll \mu_1$ in $\nu_2 \ll \mu_2$.

a) Dokaži, da velja $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$.

b) Utemelji, da obstajata Radon-Nikodymova odvoda $\frac{d\nu_1}{d\mu_1}$ in $\frac{d\nu_2}{d\mu_2}$.

c) Dokaži, da velja

$$\frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}(x, y) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x) \cdot \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(y).$$

4. naloga (25 točk)

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor in $p \in \mathbb{N}$. Naj bosta f in g nenegativni merljivi funkciji, kjer je $g \in L^p(\mu)$.

- a) Če je $0 \leq f \leq g$, pokaži, da je $f \in L^p(\mu)$ in $\|f\|_p \leq \|g\|_p$.
- b) Če je $f \in L^p(\mu)$, dokaži $\|g\|_p^p + \|f\|_p^p \leq \|f + g\|_p^p$.
- c) Če je $0 \leq f \leq g$, pokaži $\|g - f\|_p^p \leq \|g\|_p^p - \|f\|_p^p$.
- d) Če je $p = 1$, pokaži, da je $\|f + g\|_1 = \|f\|_1 + \|g\|_1$.