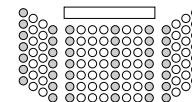


Analiza 3: 1. izpit29. 1. 2021 10⁰⁰ – 11³⁰

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Vse odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!



Sedež (2.05)

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Ime in priimek

1. naloga (25 točk)

Dan naj bo integral s parametrom

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-a^2 x^2} (1 - e^{ax^2})}{x^2} dx.$$

- a) Določi konvergenčno območje integrala $I(a)$.
 b) Izračunaj $I(0)$ in $I(1)$.
 c) Izračunaj odvod $I'(a)$ v notranjosti konvergenčnega območja. Odgovor utemelji!

Rešitev:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-a^2 x^2} (1 - e^{ax^2})}{x^2} = -a$, tako da je problem le v ∞ . Integral preoblikujemo v

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-a^2 x^2} - e^{(a-a^2)x^2}}{x^2} dx$$

Če je $a = 0$ imamo $I(0) = 0$, pri $a = 1$ tudi konvergira, sicer pa mora biti koeficient $a - a^2$ strogo negativen, da bo integral konvergiral. Dobimo torej, da je konvergenčno območje

$$(-\infty, 0] \cup [1, \infty).$$

Velja

$$I(0) = 0$$

$$I(1) = \int_0^\infty \frac{e^{-x^2} - 1}{x^2} dx = \dots$$

per-partes ($u = e^{-x^2} - 1$, $dv = x^{-2} dx$)

$$\dots = -2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx = -\int_0^\infty e^{-t} \sqrt{t} dt = -\Gamma(\tfrac{1}{2}) = -\sqrt{\pi}.$$

Velja

$$I'(a) = \int_0^\infty -2ae^{-a^2 x^2} - (1-2a)e^{(a-a^2)x^2} dx = \dots (\text{uporabimo Gama funkcijo}) \dots = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2a-1}{\sqrt{a^2-a}} - 2 \right).$$

Odvajanje je utemeljeno, saj za $[c, d] \subset (1, \infty)$ velja

$$|-2ae^{-a^2 x^2} - (1-2a)e^{(a-a^2)x^2}| \leq 2de^{-c^2 x^2} + (2d-1)e^{-(c^2-c)x^2} \quad a \in [c, d].$$

Integral tega zadnjega izraza konvergira in to po Weierstrassovem kriteriju implicira enakomerno konv. na $[c, d] \subset (1, \infty)$.

Podobno za $[c, d] \subset (-\infty, 0)$ dobimo

$$|-2ae^{-a^2 x^2} - (1-2a)e^{(a-a^2)x^2}| \leq 2ce^{-d^2 x^2} + (1-2c)e^{-(d^2-d)x^2} \quad a \in [c, d].$$

Integral tega zadnjega izraza konvergira in to po Weierstrassovem kriteriju implicira enakomerno konv. na $[c, d] \subset (-\infty, 0)$.

2. naloga (25 točk)

Dano je nehomogeno telo

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x^2 + y^2 + z^2)^3 \leq x^2 + y^2\},$$

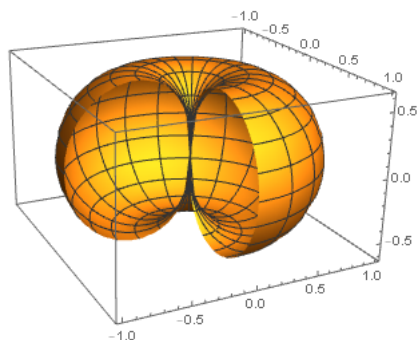
katerega gostota v točki (x, y, z) je dana s funkcijo $\rho(x, y, z) = z^2$.

Izračunaj maso telesa V .

Rešitev:

V sferičnih koordinatah je telo opisano z

$$\varphi \in [0, 2\pi] \quad \vartheta \in [0, \pi] \quad r \in [0, \sqrt{\sin \vartheta}].$$



Masa telesa je

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{\sqrt{\sin \vartheta}} r^2 \sin \vartheta r^2 \cos^2 \vartheta dr = \\ &= 2\pi \int_0^\pi \sin \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta \int_0^{\sqrt{\sin \vartheta}} r^4 dr = \frac{2\pi}{5} \int_0^\pi \sin^{\frac{7}{2}} \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta = \frac{2\pi}{5} B\left(\frac{9}{4}, \frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

3. naloga (25 točk)

Naj bo

$$\dot{x}(t) = A x(t) + f(t)$$

nehomogen sistem n linearnih enačb.

Naj bo $\lambda = -1$ lastna vrednost matrike A in V pripadajoči lastni vektor. Naj bo

$$f(t) = t^2 V.$$

Določi funkcijo $\varphi(t)$ tako, da bo

$$x_p = \varphi(t) V$$

partikularna rešitev danega sistema enačb z lastnostjo, da je $x_p(0) = 0$.

Rešitev:

Vstavimo $\varphi(t) V$ v sistem in dobimo

$$\dot{\varphi} V = -\varphi V + t^2 V,$$

kar nam da

$$\dot{\varphi} + \varphi = t^2.$$

Splošna rešitev te diferencialne enačbe je

$$\varphi(t) = C e^{-t} + 2 - 2t + t^2,$$

če upoštevamo še $x_p(0) = 0$ pa dobimo $C = -2$ in končno

$$x_p(t) = (2 - 2t + t^2 - 2e^{-t}) V.$$

4. naloga (25 točk)

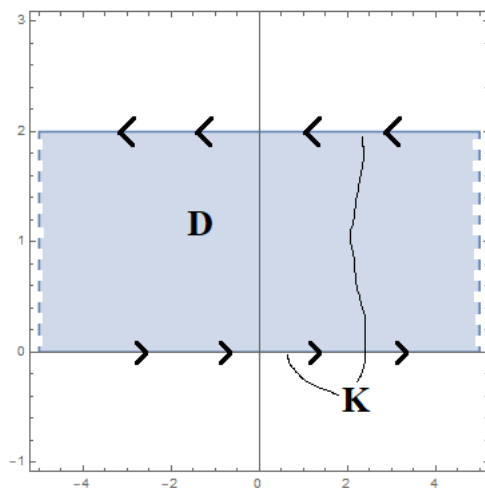
Izračunaj

$$\int_K \frac{\sin z}{z^2 + 1} dz,$$

kjer je K rob območja

$$D = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) \in [0, 2]\},$$

orientiran kot je prikazano na spodnji sliki:



Rešitev:

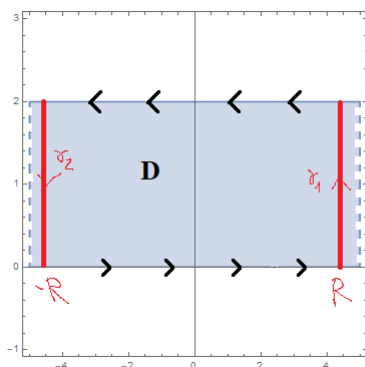
Znotraj območja D je le singularnost $z = i$. Velja

$$\int_K \frac{\sin z}{z^2 + 1} dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{\sin z}{z^2 + 1}, i \right) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{\sin z}{z + i} = 2\pi i \frac{\sin(i)}{2i} = 2\pi i \frac{i \sinh(1)}{2i} = i \pi \sinh(1).$$

(Velja $\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$)

Ker gre za neomejeno območje, integral gledamo kot limito $R \rightarrow \infty$ po (pozitivno orientiranem) robu območja

$$D_R = \{z \in \mathbb{C}; \Re(z) \in [-R, R], \Im(z) \in [0, 2]\}$$



Poglejmo integral po $\gamma_1(t) = R + it, t \in [0, 2]$. Imamo

$$\int_{\gamma_1} \frac{\sin z}{z^2 + 1} dz = \int_0^2 \frac{i \sin(R + it)}{(R + it)^2 + 1} dt$$

Velja

$$\left| \int_0^2 \frac{i \sin(R + it)}{(R + it)^2 + 1} dt \right| \leq \int_0^2 \left| \frac{i \sin(R + it)}{(R + it)^2 + 1} \right| dt \leq \int_0^2 \frac{1 + e^2}{R^2 - 3} dt \rightarrow 0 \text{ za } R \rightarrow \infty$$

Podobno za $\gamma_2(t) = -R + i(2 - t)$, $t \in [0, 2]$ in imamo

$$\int_{\gamma_2} \frac{\sin z}{z^2 + 1} dz = \int_0^2 \frac{-i \sin(-R + i(2 - t))}{(-R + i(2 - t))^2 + 1} dt$$

Velja

$$\left| \int_0^2 \frac{-i \sin(-R + i(2 - t))}{(-R + i(2 - t))^2 + 1} dt \right| \leq \int_0^2 \frac{1 + e^2}{R^2 - 3} dt \rightarrow 0 \text{ za } R \rightarrow \infty,$$

tako da rezultat (z začetka rešitve) velja.