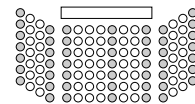


### Analiza 3: 1. kolokvij

23. 12. 2020 12<sup>00</sup>

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Vse odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

Ime in priimek



Sedež (2.05)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|

Vpisna številka

|   |  |
|---|--|
| 1 |  |
| 2 |  |
| 3 |  |
| 4 |  |
| Σ |  |

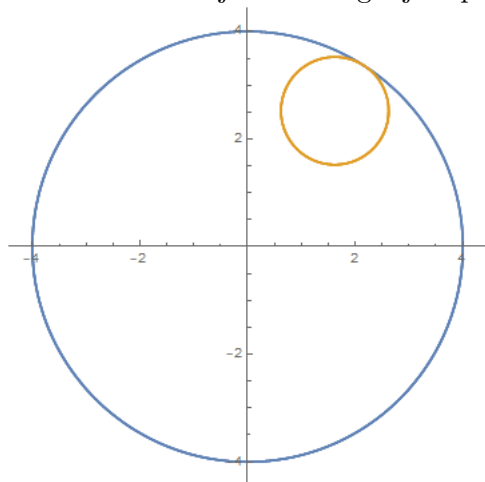
#### 1. naloga (25 točk)

Dan naj bo krog  $K_R$  radija  $R > 1$ .

a) Parametriziraj krivuljo, ki jo opiše točka z roba kroga radija 1, ki se kotali po notranjosti kroga  $K_R$  in gre skozi točko  $(R, 0)$ .

b) Naj bo  $R = 4$ . Izračunaj dolžino krivulje  $\vec{r}(t)$  za  $t \in [0, 2\pi]$ .

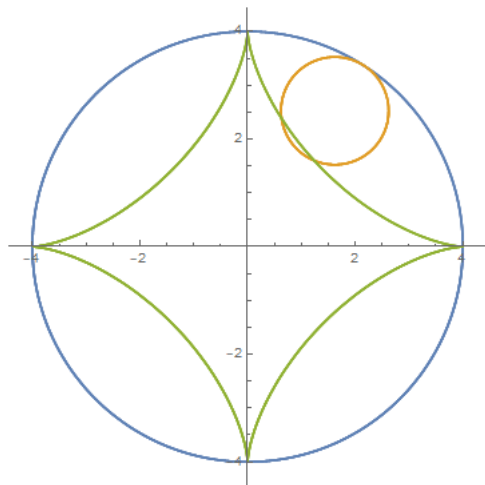
c) Po kateri krivulji se točka giblje v primeru, da je  $R = 2$ ?



**Rešitev:**

Dobimo

$$\vec{r}(t) = ((R-1)\cos t, (R-1)\sin t) + (\cos(t-Rt), \sin(t-Rt)) \quad t \in \mathbb{R}$$



Za  $R = 4$  imamo

$$|\dot{\vec{r}}(t)| = 6|\sin 2t|$$

tako da dolžina znaša

$$L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6 \sin 2t \, dt = \dots = 24.$$

Pri  $R = 2$  dobimo

$$\vec{r}(t) = (2\cos t, 0)$$

tako da se točka giblje po daljici med točkama  $(-2, 0)$  in  $(2, 0)$ .

**2. naloga (25 točk)**

Dan je integral s parametrom

$$I(a) = \int_0^{\infty} \frac{\ln(ax + \sqrt{1+x^2})}{x^{\frac{3}{2}}} dx .$$

- a) Pokaži, da integral  $I(a)$  konvergira za vse  $a \geq 0$ .
- b) Ali je  $I(a)$  zvezna funkcija na intervalu  $[0, \infty)$ ?
- c) Ali je  $I(a)$  odvedljiva funkcija na intervalu  $[0, \infty)$ ?
- d) Izračunaj  $I(0)$ .

**Rešitev:** Pri spodnji meji zapišemo

$$\int_0^1 \frac{\frac{\ln(ax + \sqrt{1+x^2})}{x}}{x^{\frac{1}{2}}} dx$$

in

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(ax + \sqrt{1+x^2})}{x} = L'Hop = a$$

torej pri  $x = 0$  integral konvergira.

Pri zgornji meji  $x = \infty$  pa lahko zapišemo integral kot

$$\int_0^1 \frac{\frac{\ln(ax + \sqrt{1+x^2})}{x^{\frac{1}{4}}}}{x^{\frac{5}{4}}} dx$$

in ker je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(ax + \sqrt{1+x^2})}{x^{\frac{1}{4}}} = L'Hop = 0$$

in integral konvergira tudi pri zgornji meji.

Na poljubnem intervalu  $[0, M] \subset [0, \infty)$  imamo

$$\frac{\ln(ax + \sqrt{1+x^2})}{x^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{\ln(Mx + \sqrt{1+x^2})}{x^{\frac{3}{2}}}$$

torej po Weierstrassovem kriteriju integral na  $[0, M]$  konvergira enakomerno, torej  $I$  je zvezna funkcija.

Velja

$$I'(a) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(ax + \sqrt{1+x^2})} dx,$$

kar velja, saj na  $[0, \infty)$  velja

$$\frac{1}{\sqrt{x}(ax + \sqrt{1+x^2})} \leq \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x^2})},$$

kar po Weierstrasu pomeni, da integral za  $I'$  konvergira enakomerno na  $[0, \infty)$ , torej je  $I$  odvedljiva.

Velja

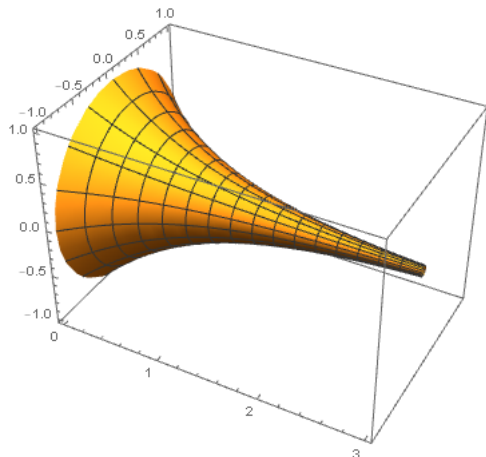
$$I(0) = \int_0^\infty \frac{\ln \sqrt{1+x^2}}{x^{\frac{3}{2}}} dx = per - partes + Beta = \pi\sqrt{2}.$$

### 3. naloga (25 točk)

Dano naj bo homogeno telo

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y^2 + z^2 \leq e^{-2x}, x \geq 0\}.$$

Izračunaj vzrajnostni moment  $J_z$  telesa  $T$  (glej sliko).



**Nasvet:** Uporabi primerno prirejene cilindrične koordinate.

**Rešitev:**

Uporabimo varianto cilindričnih koordinat prirejenih za to situacijo

$$x = x \quad y = r \cos \varphi \quad z = r \sin \varphi,$$

kjer  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ,  $x \in [0, \infty)$ ,  $r \in [0, e^{-x}]$ , determinanta Jacobijeve matrike pa je  $r$ . Dobimo integral

$$J_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dx \int_0^{e^{-x}} (x^2 + r^2 \cos^2 \varphi) r dr = \dots = \frac{5\pi}{16}.$$

#### 4. naloga (25 točk)

Dana naj bo diferencialna enačba

$$x^2 y'' + 4xy' = \sqrt{x} \quad x > 0.$$

Poišči splošno rešitev dane diferencialne enačbe. Uporabi dejstvo, da je ena od rešitev homogene diferencialne enačbe  $x^2 y'' + 4xy' = 0$  enaka  $y_1(x) = 1$ .

**Rešitev:**

Velja

$$W(x) = e^{-\int \frac{4}{x} dx} = x^{-4}$$

in če vzamemo  $y_1 = 1$ , potem za  $y_2$  dobimo

$$y_2' = x^{-4} \Rightarrow y_2 = -\frac{1}{3}x^{-3}$$

Splošna rešitev homogene enačbe je torej

$$y = A + Bx^{-3} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Za variacijo konstante dobimo pogoja

$$C_1' + x^{-3}C_2' = 0 \quad -3x^{-4}C_2' = x^{-\frac{3}{2}}$$

od koder dobimo

$$C_2 = -\frac{2}{21}x^{\frac{7}{2}} \quad C_1 = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}},$$

kar nam da splošno rešitev

$$y = A + Bx^{-3} + \frac{4}{7}x^{\frac{1}{2}}.$$