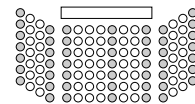


Analiza 3: 2. kolokvij

22. 1. 2021 $10^{00} - 11^{30}$

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Vse odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

Ime in priimek



Sedež (2.05)

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Dan naj bo sistem diferencialnih enačb

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

a) Poišči splošno rešitev sistema enačb.

b) Poišči vse rešitve sistema z lastnostjo, da je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$$

ter določi enačbo ravnine na kateri leži vsaka takšna rešitev.

Rešitev:

Imamo eno lastno vrednost $\lambda = 2$ z lastnim vektorjem $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Potem imamo še dvojno lastno vrednost $\lambda = -1$. Velja

$$A + I = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

katere jedro ima dimenzijo 1, medtem ko je

$$(A + I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

z jedrom dimenzije 2. Izberemo korenski vektor

$$V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \ker(A + I)^2 - \ker(A + I)$$

od koder dobimo še lastni vektor

$$V_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = (A + I) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Splošna rešitev sistema enačb je torej

$$X(t) = C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + C_3 e^{-t} \left(t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Iskane rešitve so

$$X(t) = C_2 e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + C_3 e^{-t} \left(t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad C_2, C_3 \in \mathbb{R},$$

ki očitno ležijo na ravnini napeti na vektorja $(1, 0, 0)$ in $(-1, 0, -1)$ in ta ravnina gre skozi točko $(0, 0, 0)$, torej je enačba ravnine ravno

$$y = 0.$$

2. naloga (25 točk)

Naj bo $(\mathcal{C}([0, \frac{1}{2}]), d_\infty)$ poln metričen prostor zveznih funkcij na intervalu $[0, \frac{1}{2}]$, kjer je d_∞ metrika dana z

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, \frac{1}{2}]} |f(x) - g(x)| \quad f, g \in \mathcal{C}([0, \frac{1}{2}]).$$

a) Dana naj bo preslikava $\Phi : \mathcal{C}([0, \frac{1}{2}]) \rightarrow \mathcal{C}([0, \frac{1}{2}])$ s predpisom

$$\Phi(f)(x) = 1 + \int_0^x e^{x-t} f(t) dt.$$

Pokaži, da je Φ skrčitev in določi negibno točko preslikave Φ .

b) Naj bo $g(x) = \sin x$. Poišči funkcijo f , ki reši enačbo

$$\Phi(f) = g.$$

Rešitev:

Velja

$$d_\infty(\Phi(f), \Phi(g)) = \sup_{x \in [0, \frac{1}{2}]} \left| \int_0^x e^{x-t} (f(t) - g(t)) dt \right| \leq \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| \int_0^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}-t} dt = (\sqrt{e} - 1) d_\infty(f, g)$$

torej je Φ skrčitev s faktorjem $\sqrt{e} - 1 < 1$.

Iščemo rešitev enačbe

$$f(x) = 1 + \int_0^x e^{x-t} f(t) dt.$$

Odvajamo po x in dobimo

$$f'(x) = f(x) + \int_0^x e^{x-t} f(t) dt = 2f(x) - 1,$$

od koder dobimo $f(x) = Ce^{2x} + \frac{1}{2}$. Ker je $f(0) = 1$, je $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}$ negibna točka preslikave Φ .

Enačba $\Phi(f) = g$ je ravno

$$\sin(x) = 1 + \int_0^x e^{x-t} f(t) dt,$$

kar nam z odvajanjem po x da

$$\cos x = f(x) + \int_0^x e^{x-t} f(t) dt = f(x) + g(x) - 1 = f(x) + \sin x - 1$$

torej je iskana rešitev

$$f(x) = \cos x - \sin x + 1.$$

3. naloga (25 točk)

Dana naj bo kompleksna funkcija f s predpisom

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2 - z}.$$

Razvij funkcijo f v Taylorjevo vrsto do reda 4 okoli točke $z = 0$.

Rešitev:

Imamo $f(z) = (e^z - 1)(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z})$. Velja

$$\begin{aligned} f(z) &= (z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots)(-(1 + z + z^2 + z^3 + \dots) - \frac{1}{z}) = \\ &= -1 - (1 + \frac{1}{2!})z - (1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!})z^2 - \dots - (1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n+1)!})z^n - \dots \end{aligned}$$

in dobimo

$$f(z) = -1 - \frac{3}{2}z - \frac{10}{6}z^2 - \frac{41}{24}z^3 - \frac{103}{60}z^4 - \dots$$

4. naloga (25 točk)

Kompleksni hiperbolični cosinus in sinus sta dana z

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

a) Določi vse $z \in \mathbb{C}$ za katere je

$$\cosh(z) = 0.$$

b) Izračunaj integral

$$\oint_K \frac{z}{\cosh(z + iz)} dz$$

po pozitivno orientirani krivulji

$$K = \{z \in \mathbb{C}; |z| = \pi\}.$$

Rešitev:

Nižle funkcije $\cosh(z)$ so

$$z = i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Funkcija pod integralom ima pole v točkah, kjer je

$$z + zi = i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \Rightarrow \left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)(1 + i),$$

tako da znotraj K ležita le

$$z_1 = \frac{\pi}{4}(1 + i) \quad z_2 = -\frac{\pi}{4}(1 + i).$$

Velja

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z(z - z_1)}{\cosh(z + iz)} = \frac{\pi}{4}(1 + i) \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{(z - z_1)}{\cosh(z + iz)} = L'Hop = \frac{\pi}{4} \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{\sinh(z + iz)} = \\ &= \frac{\pi}{4} \frac{1}{\sinh(i\frac{\pi}{2})} = -i\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Podobno je $\operatorname{Res}(f, z_2) = -i\frac{\pi}{4}$. Dobimo

$$\oint_K \frac{z}{\cosh(z + iz)} dz = 2\pi i 2\left(-i\frac{\pi}{4}\right) = \pi^2.$$