ŠTEVILA

NARAVNA ŠTEVILA

Z njimi štejemo: 1, 2, 3, ...

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Aksiomatsko jih boste definirali pri teoriji množic.
Vsako naravno število n ima naslednika, n^+.
Peanovi aksiomi: $\mathbb{N}$ je množica skupaj s pravilom, ki vsakemu elementu $n \in \mathbb{N}$ dodeli naslednika $n^+ \in \mathbb{N}$ in velja:

(1) $m, n \in \mathbb{N}$ in $m^+ = n^+ \Rightarrow m = n$

(2) Obstaja število $1 \in \mathbb{N}$, ki ni naslednik nobenega naravnega števila.

(3) Če je $A \subset \mathbb{N}$ in če je $1 \in A$ in če velja:
zaporedni $n \in A$, je $n^+ \in A$
Potem je $A = \mathbb{N}$.

Aksiom (3) se imenuje aksiom popolne indukcije.

Primer. Za vsako naravno število n je izraz $4^n - 3n + 8$ deljiv z 9.

Dokaz. $A = \{n;\ 9 \mid 4^n - 3n + 8\}$.

$1 \in A$: $4^1 - 3 + 8 = 9$ ✓

privzemimo, da je $n \in A$ tj., $9 \mid 4^n - 3n + 8$.
dokažimo, da je $n^+ = n+1 \in A$, tj. $9 \mid 4^{n+1} - 3(n+1) + 8$.

$$4^{n+1} - 3(n+1) + 8 = 4 \cdot (3n - 8 + 9k) - 3n + 5 =$$
$$= 3 \cdot 3n + 4 \cdot 9k - 27 = 9(n + 4k - 3)$$

Naravna števila lahko med seboj seštevamo in množimo.
(O definiciji teh dveh operacij več pri Logika in množice).
Naravna števila so urejena po velikosti. Vsaka neprazna podmnožica ima najmanjši element.

dobra urejenost

Naravnih števil ne moremo vedno odšteti, zato jih vložimo v cela števila:

CELA ŠTEVILA

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$

Računski operaciji se iz $\mathbb{N}$ razširita na $\mathbb{Z}$, poleg tega je dobro definirano odštevanje.

Množico celih števil lahko uredimo, vendar lastnost, da ima vsaka neprazna podmnožica najmanjši element, ni več izpolnjena.

Ker v splošnem celih števil med seboj ne moremo deliti, jih vložimo v (mn) racionalnih števil.

RACIONALNA ŠTEVILA

Ulomki: so kvocienti celih števil, bolj natančno, to so kvocienti celih in naravnih števil.

$$\frac{4}{2} = \frac{2}{1}$$

dva različna ulomka $\frac{m}{n}$, $\frac{k}{l}$ predstavljata isto racionalno število, kadar velja $m \cdot l = k \cdot n$.

Lahko naredimo takole:

$$\mathbb{Z}\times\mathbb{N} = \{(m,n);\ m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}\}.$$

Množico $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ razdelimo na ekvivalenčne razrede:

V istem razredu sta urejena para (m,n) in (k,l) kadar je $ml=nk$.

Def. Racionalno število je razred urejenih parov in ga zapišemo $\frac{m}{n}$.
Sedaj dovolimo tudi negativna števila v imenovalcu, prav tako sedaj ne dovolimo 0 v imenovalcu.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n};\ m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Računanje v $\mathbb{Q}$:

- seštevanje: $\frac{m}{n}+\frac{k}{l} = \frac{ml+nk}{nl}$, $\quad m,k\in\mathbb{Z},\ n,l\in\mathbb{N}$

preveriti je treba, ali je seštevanje dobro definirano:

če je $\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$ in $\frac{k}{l}=\frac{k'}{l'}$ ali je $\frac{m'l'+n'k'}{n'l'} = \frac{ml+nk}{nl}$?

- množenje: $\frac{m}{n}\cdot\frac{k}{l} = \frac{mk}{nl}$. $\quad m,k\in\mathbb{Z},\ n,l\in\mathbb{N}$

Za hip pozabimo na konkretno številsko množico in povzemimo lastnosti rač. operacij.

Lastnosti računskih operacij: vemo, katere lastnosti veljajo.

Osnovnim lastnostim, ki morajo veljati, bomo rekli aksiomi. Iz aksiomov izpeljemo vse druge lastnosti računskih operacij. Imejmo množico A z operacijo $+$, na kateri velja:

A1 (asociativnost seštevanja) Za $\forall$ vse a,b,c velja:

$(a+b)+c = a+(b+c)$.

A2 (komutativnost seštevanja) Za vsa števila a,b velja:

$a+b=b+a$

A3 (obstoj enote za seštevanje) Obstaja tako število 0, da za vsako število a velja:

$0+a=a+0=a$

A4 (obstoj nasprotnega števila).

Za vsako število a obstaja nasprotno število, ki ga označimo z $-a$, da velja:

$$(-a)+a = a+(-a) = 0.$$

Pravimo, da je A ~~komutativna~~ abelova grupa za $+$.

Iz aksiomov izpeljemo znane lastnosti seštevanja:

Trditev. Za dano število je nasprotno število eno samo.

Dokaz. Izberimo poljubno število a.
Denimo, da obstajata dve nasprotni števili b in c,
tj. $a+b=0$ in $a+c=0$.
Izračunajmo $c+(a+b)$

$$c+(a+b) = c+0 \overset{A3}{=} c$$

$$c+(a+b) \overset{A1}{=} (c+a)+b \overset{A2}{=} (a+c)+b = 0+b = $$

$$\overset{A2}{=} b+0 \overset{A3}{=} b$$

Torej je $b=c$. $\blacksquare$

Trditev. Če je $a+x=a+y$, potem je $x=y$ (pravilo krajšanja).

Dokaz. $a+x=a+y \overset{A4}{\Rightarrow} -a+(a+x) = -a+(a+y)$

$$\overset{A1}{\Rightarrow} (-a+a)+x = (-a+a)+y$$

$$\overset{A4}{\Rightarrow} 0+x = 0+y$$

$$\overset{A3}{\Rightarrow} x = y$$

Posledica. $-0=0$

Dokaz. $\left.\begin{array}{l} 0+(-0) \overset{A4}{=} 0 \\ 0+0 \overset{A3}{=} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0+(-0) = 0+0 \overset{\text{pravilo krajšanja}}{\Rightarrow} -0=0$

Odštevanje: Rešitev enačbe $b+x=a$ imenujemo razlika števil a in b.
Koliko je x?
Enačbi prištejemo $-b$:
$$-b+(b+x)=-b+a$$
$$x=a+(-b)$$
Rešitev enačbe je ena sama in jo označimo z $a-b$.

POZOR: odštevanje ne ustreza lastnostim (A1)-(A4)

Lastnosti množenja:

A5 (asociativnost množenja).
Za vse $a,b,c\in A$ velja: $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

A6 (komutativnost množenja)
Za vse $a,b\in A$ velja: $a\cdot b=b\cdot a$.

A7 (obstoj enote za množenje):
Obstaja tako število $1\in A$, da za vsak $a\in A$ velja: $1\cdot a=a$

A8 (obstoj inverznega elementa):
Vsako od 0 različno število a ima obratno število a^{-1}, za katerega velja $a^{-1}\cdot a=a\cdot a^{-1}=1$.

Množico $A\setminus\{0\}$ z operacijo množenja, ki izpolnjuje (A5)-(A8), imenujemo grupa za množenje.

Na podoben način kot za seštevanje izpeljemo:

Trditev. Vsako število $a\in A, a\neq 0$, ima eno samo obratno število.

Trditev. Velja pravilo krajšanja za množenje:
Če $a\neq 0$ in je $a\cdot x=a\cdot y$, potem je $x=y$.

Posledica. $1^{-1}=1$.

A9 Števili 1 in 0 sta različni: $0\neq 1$.

A10 Distributivnost: Za poljubna števila $a,b,c\in A$ velja:
$$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$$

Množico A z operacijama +, · , ... za katere veljajo
n aksiomi A1 – A10, imenujemo komutativni obseg

ali polje.

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ je polje.

V A vpeljemo še urejenost:

A11 Za vsako število $a \neq 0, a \in A$ velja, da je natanko eno od števil $a, -a$ pozitivno. Število 0 ni niti pozitivno niti negativno. (a je negativno, če je $-a$ pozitivno).

A12 Za poljubni pozitivni števili $a, b \in A$, sta števili $a+b$ in $a \cdot b$ pozitivni.

DN: 1 je pozitivno; če je A urejen obseg, ima neskončno elementov.

Če ima obseg A urejenost, ki izpolnjuje aksioma A11 in A12, ga imenujemo urejen obseg.

V urejenem obsegu definiramo urejenost takole:

$a > b$, če je $a - b$ je pozitivno število. Pišemo tudi $b < a$.

V posebnem primeru to pomeni: $a > 0$, če je a pozitivno število.

Iz A11 sledi: za poljubni števili $a, b \in A$ velja natanko ena od možnosti:

$a < b$, $a > b$ ali $a = b$.

Trditev. Naj bodo $a, b, c \in A$.

(1) Če je $a > b$ in $b > c$, potem je $a > c$. (tranzitivnost)

(2) Če je $a > b$, potem je $a + c > b + c$.

(4) Če je $a > b > 0$ in $c > d > 0$, potem je $a \cdot c > b \cdot d$.

(3) Če je $a > b$ in $c > 0$, potem je $a \cdot c > bc$.

Dokaz. (1) Če $a>b$ in $b>c$, potem $a-b$ pozit. in $b-c$ pozit.

Torej je $(a-b)+(b-c)$ pozitivno število.

$$(a-b)+(b-c)=a+((-b)+b)+(-c)=a-c$$

Tj. $a>c$.

(2) $(a+c)-(b+c)=a-b>0$

$$-(b+c)=(-b)+(-c)$$

(3) $a-b>0$ in $c>0$, $a-b$ in c sta pozitivni; po $A12_+$ je $(a-b)c$ pozit.

(4) $a>b$ in $c>0 \overset{(3)}{\Rightarrow} ac>bc$

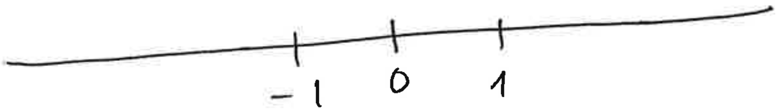
$c>d$ in $b>0 \overset{(3)}{\Rightarrow} cb>bd$

Tranzit. $ac>bd$.

$\mathbb{Q}$ za običajno urejenost je urejen obseg.

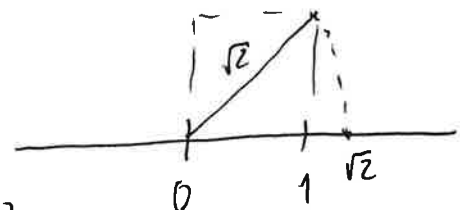
Definicija. Naj bo $a,b\in A$.
Pišemo $a\geq b$, če je $a>b$ ali $a=b$.

Racionalna števila lahko predstavimo na številski premici



Racionalna števila so na premici povsod gosta, tj. na vsakem odprtem intervalu leži racionalno število. Racionalna števila premice ne napolnijo.

Primer. rešitev enačbe $x^2=2$ ni racionalno število.



Dokaz. označimo pozitivno rešitev enačbe $x^2=2$ s $\sqrt{2}$.
Denimo, da je $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$, $m,n\in\mathbb{N}$,
pri čemer je $\frac{m}{n}$ okrajšan ulomek.

dokaz s protislovjem

$$2=\frac{m^2}{n^2}$$

$2n^2=m^2 \Rightarrow m^2$ je sodo število $\Rightarrow m=2k$

$2n^2=4k^2$

$n^2=2k^2 \Rightarrow n$ je sodo število $\divideontimes$.

DEDEKINDOV AKSIOM, REALNA ŠTEVILA

Radi bi konstruirali številsko množico, ki natančno napolni premico.

Dedekindov pristop: množico $\mathbb{Q}$ razrežemo na spodnjo α_s in zgornjo množico α_z, $\alpha_s \cup \alpha_z = \mathbb{Q}$, $\alpha_s \cap \alpha_z = \emptyset$, $\alpha_s \neq \emptyset \neq \alpha_z$, α_s nima največjega elementa (tj. če je racionalno število tisto, ki razreže, pripada α_z).

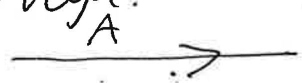
Realno število je α_s.

8.10.18

Primer. $\alpha_s = \{x \in \mathbb{Q}, x < \frac{7}{4}\}$ $\quad (\alpha_z = \{x \in \mathbb{Q}, x \geq \frac{7}{4}\})$

$\beta_s = \{x \in \mathbb{Q}, x < 0 \text{ ali } x^2 < 2\}$

Definicija. Rez je podmnožica $A \subset \mathbb{Q}$, za katero velja:



(i) $A \neq \emptyset$, $A \neq \mathbb{Q}$

(ii) če je $p \in A$ in $q \in \mathbb{Q}$, $q < p$, potem je $q \in A$

(iii) za vsak $p \in A$ obstaja $r \in A$, $p < r$. $\leftarrow$ rez nima največjega elementa

Definicija. Množica realnih števil je množica vseh rezov.

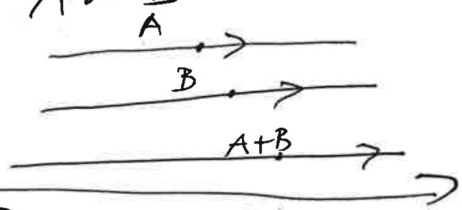
Trditev. Preslikava $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, ki deluje s predpisom

$$p \mapsto \{q \in \mathbb{Q}, q < p\} =: p^*$$

vloži množico racionalnih števil v mn. realnih števil.

Računski operaciji z realnimi števili:

Def. Naj bosta A in B reza. Vsoto rezov A in B označimo z $A + B = \{r + s;\ r \in A, s \in B\}$



$A+B$ je res rez: (i) jasno za $A+B \neq \emptyset$; $A+B \neq \mathbb{Q}$

(ii) $p \in A+B \Rightarrow p = r + s$, $r \in A$, $s \in B$.

če je $q < p$, potem je $q = \underset{\in A}{r} + \underbrace{(s + q - p)}_{\hat{s}\,\in B} \in A+B$

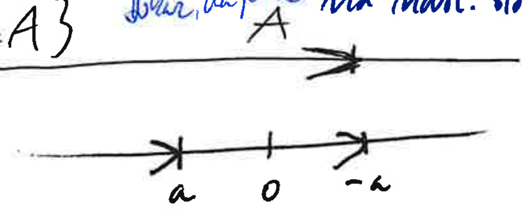
(iii) $p \in A+B \Rightarrow p = r + s$.

$\exists r' \in A,\ r' > r$ in $\exists s' \in B,\ s' > s$: $r' + s' > p$

Da se preveriti, da veljajo aksiomi A1–A4, pri čemer nasprotni rez $-A$ definiramo takole:

$$-A = \{r;\ \exists r' > r,\ r' + p < 0 \text{ za } \forall p \in A\}$$

Dokaz, da je rez na nasl. strani



Velja: $-A$ je rez in $-A + A = 0^*$.

Produkt rezov:

Pravimo, da je rez A pozitiven, če vsebuje 0^*. $A > B$, če $A \neq B$ in $B \subset A$.

Naj bosta A in B pozitivna reza. Produkt

$$A \cdot B = \{p;\ p \le r \cdot s \text{ za nek } r \in A, s \in B, r > 0, s > 0\}.$$

Naj bosta A in B poljubna reza.

$$A \cdot B = \begin{cases} (-A)\cdot(-B), & \text{če je } A < 0^*, B < 0^* \\ -((-A)\cdot B), & \text{če je } A < 0^*, B > 0^* \\ -(A \cdot (-B)), & \text{če je } A > 0^*, B < 0^* \end{cases}$$

$0^* \cdot A = A \cdot 0^* = 0^*$

Ni težko pokazati, da množica rezov za operaciji $+$ in $\cdot$ ter urejenost izpolnjuje A1–A12.

Opomba. $p, q \in \mathbb{Q}$: $(p+q)^* = p^* + q^*$ in $(p \cdot q)^* = p^* \cdot q^*$.

če je $p < q$, potem je $p^* < q^*$.

Torej urejen obseg $\mathbb{R}$ vsebuje $\mathbb{Q}$ kot podobseg.

Obseg $\mathbb{R}$ pa izpolnjuje še dodatno lastnost, ki jo bomo spoznali v nadaljevanju, in se imenuje Dedekindov aksiom, ki v bistvu pomeni, da zapolni številsko premico.

Tega aksioma obseg $\mathbb{Q}$ ne izpolnjuje.

$-A = \{p;\ \exists r>0,\ -p-r \notin A\}$ je rez

i) $-A \neq \mathbb{Q}$: ker $A \neq \emptyset$ $\exists a \in A$.
iz ii) za A sledi: $a-r \in A$ za vsak $r>0$.
$\Rightarrow -a \notin -A$.

$-A \neq \emptyset$: ker $A \neq \mathbb{Q}$ $\exists b \notin A$.
iz ii) sledi, da $b+1 \notin A$.
torej $(b+1)-1 \notin A$
$\Rightarrow -(b+1) \in -A$.

ii) izberimo poljuben $p \in -A$ in $q<p$.
potem $\exists r>0$: $-p-r \notin A$.
ker je $-p-r < -q-r$ sledi iz ii) za A, da
$-q-r \notin A$, torej $q \in -A$.

iii) izb. polj. $p \in -A$.
obstaja $r>0$: $-p-r \notin A$
$(-p-\frac{r}{2})-\frac{r}{2} \notin A$
$\Rightarrow p+\frac{r}{2} \in -A$.

$-A+A = 0^*$

•) $p \in -A$ in $q \in A$.
iz $p \in -A$ sledi: $\exists r>0$: $-p-r \notin A$
$\Rightarrow -p-r > q$ (sicer bi po (ii) $*$)
$\Rightarrow p+q < -r < 0 \Rightarrow -A+A \subset 0^*$

•) izb. polj $s<0$. izb. polj $p \in -A$. $\exists r>0$: $-p-r \notin A$.
$\exists m \in \mathbb{N}$: $-p+\frac{q}{m} \notin A$. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ tako število: $-p+\frac{n}{2}\frac{q}{m} \notin A$,
$-p+\frac{n+1}{2}\cdot\frac{q}{m} \in A$.

Potem velja: $-p+\frac{n+1}{2}\cdot\frac{q}{m} \in A$
$p-\frac{n-1}{2}\cdot\frac{q}{m} \in -A$
$\Rightarrow \frac{q}{m} \in A+(-A)$
$\Rightarrow q \in A+(-A)$ (ker $q<\frac{q}{m}$).

$-p+\frac{(n-1)}{2}\cdot\frac{q}{m}+\frac{1}{2}\frac{q}{m}$

Š9.5

Naj bo B urejen obseg.

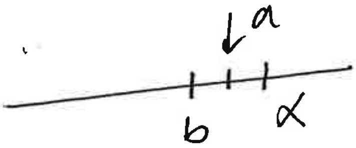
Definicija. Naj bo $A \subset B$ urejena množica (npr. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$).
Pravimo, da je A navzgor omejena, če obstaja tako število $M \in B$, da je $a \leq M$ za vsak $a \in A$.
Vsakemu številu M s to lastnostjo pravimo zgornja meja množice A (v B).

Opomba. Če je množica A navzgor omejena, v $\mathbb{Q}$ ali $\mathbb{R}$ ima neskončno zgornjih mej.

Definicija. Naj bo A neprazna navzgor omejena množica.
Najmanjšo od vseh zgornjih mej množice A, če obstaja, imenujemo natančna zgornja meja od A. Torej je α natančna zgornja meja od A, če velja:

(a) $a \leq \alpha$ za vse $a \in A$

(b) Če je $b < \alpha$, potem b ni zgornja meja od A, tj. obstaja $a \in A$, za katerega velja $a > b$.



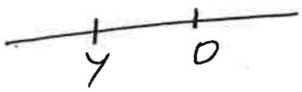
Natančno zgornjo mejo označimo s $\sup A$ in imenujemo supremum mn. A.

↓ 10.10.18

Definicija. Če obstaja največji element množice A, ga imenujemo maksimum mn. A in označimo z $\max A$.

Velja. $a \leq \max A$ za $\forall a \in A$ in $\max A \in A$.

Primer. 1) $A = \{x \in \mathbb{Q}, x < 0\} \subset \mathbb{Q}$.
0 je zgornja meja mn. A, zato je A navzgor omejena.
0 je natančna zgornja meja mn. A, ker nobeno število $y < 0$ ni zg. meja mn. A:



$$0 > \frac{y}{2} > y, \quad \frac{y}{2} \in A.$$

Množica A nima največjega elementa.

2) $A = \{x \in \mathbb{Q}, x^2 < 2\} \subseteq \mathbb{Q}$.

A je navzgor omejena, ker je 2 zgornja meja mn. A.

$x^2 < 2 < 4 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow x < 2$

• vsako število $\overset{o}{a} \in \mathbb{Q}$, za katero velja $a^2 > 2$ je zgornja meja mn A,

ker $x^2 < 2 < a^2 \Rightarrow x^2 < a^2 \underset{\text{ker je } a>0}{\Rightarrow} x < a$

• nobeno pozitivno število $a \in \mathbb{Q}$, za katero velja $a^2 < 2$

ni zgornja meja mn. A: trdimo, da je število $q = \frac{2a+2}{a+2} \in A$ in $q > a$

$$q = \frac{2a+2}{a+2} = a + \frac{2-a^2}{a+2} > a$$

$$q^2 - 2 = \frac{4(a+1)^2}{(a+2)^2} - 2 = 2\,\frac{2a^2 + \cancel{4a} + 2 - a^2 - \cancel{4a} - 4}{(a+2)^2} =$$

$$= 2\,\frac{a^2-2}{(a+2)^2} < 0$$

Iz zgornjih računov sledi, da za natančno zgornjo mejo mn. A velja: $x^2 = 2$. Vemo že, da rešitev te enačbe ni racionalno število.

Torej množica A v $\mathbb{Q}$ nima natančne zgornje meje.

↓16.10.

Podobno kot zg. mejo, sup in max definiramo sp. mejo, navzdol omejeno množico, inf in min.

beremo infimum ali natančna spodnja meja

A13 (Dedekindov aksiom) Vsaka neprazna navzgor omejena množica v A ima natančno zgornjo mejo.

Opomba. $\mathbb{Q}$ ne izpolnjuje A13.

Izrek. Vsaka navzgor omejena množica v $\mathbb{R}$ ima natančno zgornjo mejo.

Posledica. Vsaka navzdol omejena množica v $\mathbb{R}$ ima natančno spodnjo mejo.

Torej $\mathbb{R}$ izpolnjuje A1–A13.

Dokaz. Naj bo $\mathcal{A}$ neprazna navzgor omejena množica v $\mathbb{R}$ in naj bo rez $B \in \mathbb{R}$ njena zgornja meja.

Definirajmo:

$$C = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A .$$

Pokažimo, da je $C \in \mathbb{R}$ in da je $C = \sup \mathcal{A}$.

Preverimo lastnosti (i), (ii) in (iii) v defin. reza:

- Ker $\mathcal{A}$ ni prazna, obstaja $A \in \mathcal{A}$, zato je $A \subset C$, torej C ni prazna.
- Pokažimo, da $C \subset B$: Ker je B zgornja meja od $\mathcal{A}$, velja $A \leq B$ za vse $A \in \mathcal{A}$, torej velja $A \subseteq B$ za vse $A \in \mathcal{A}$, zato je $C \subset B$. Torej $C \neq \mathbb{Q}$.

Dokazali smo lastnost (i) iz definicije reza.

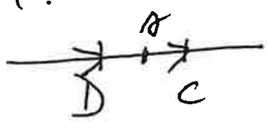
(ii) izberimo poljuben $p \in C$ in $q \in \mathbb{Q}$, $q < p$.
obstaja $A \in \mathcal{A}$: $p \in A$. Ker je A rez, je $q \in A$, zato je $q \in C$.

(iii) izberimo polj. $p \in C$.
Obstaja $A \in \mathcal{A}$, $p \in A$. Ker je A rez, obstaja $q \in A$, $q > p$.
Ker je $q \in C$, lastnost (iii) velja.

• C je zgornja meja množice $\mathcal{A}$,

za vsak $A \in \mathcal{A}$ velja: $A \subseteq C$, zato je $A \leq C$.

• C je najmanjša zgornja meja mn. $\mathcal{A}$.



izberimo poljuben $D < C$.

Tedaj obstaja $s \in C$, $s \notin D$.

Ker je $s \in C$, obstaja $A \in \mathcal{A}$, $s \in A$.

Ker sta vsaka dva reza primerljiva po velikosti in imamo $s \in A$, $s \notin D$, velja $D < A$, torej D ni zg. meja množice $\mathcal{A}$.

2. del: $\inf A = -\sup(-A)$

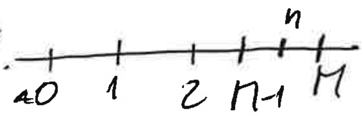
Konstrukcijo realnih števil, ki smo jo spoznali, je objavil Dedekind leta 1872. Cantor je istega leta objavil drugačno konstrukcijo. ← s Cauchyjevimi zaporedji.

15.10.18 →

POSLEDICE DEDEKINDOVEGA AKSIOMA

Posledica 1. Množica celih števil ni navzgor omejena v $\mathbb{R}$.

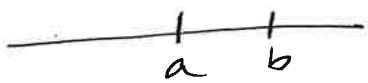
Dokaz. Denimo, da je $\mathbb{Z}$ navzgor omejena.



Potem bi imela natančno zg. mejo M.
Torej $M-1$ ni zg. meja $\mathbb{Z}$, zato obstaja $n \in \mathbb{Z}$: $n > M-1$.

$$n+1 > M, \quad n+1 \in \mathbb{Z} \nrightarrow$$

Posledica 2. Za vsak $a \in \mathbb{R}$ obstaja $b \in \mathbb{Z}$, da je $b > a$.



Dokaz. Denimo, da bi bilo neko število $a > b$ za vsak $b \in \mathbb{Z}$.
Potem bi bil a zg. meja $\mathbb{Z}$, protislovje, ker je $\mathbb{Z}$ ni navzgor omejena.

Posledica 3. Naj bosta a, b pozitivni realni števili.
Potem obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je $n \cdot a > b$.
(Arhimedska lastnost)

Dokaz. Po točki 2 obstaja $n > \frac{b}{a}$, $n \in \mathbb{N}$.
Torej je $na > b$. ■

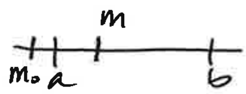
Posledica. Naj bo a pozitivno realno število.
Potem obstaja $n \in \mathbb{N}$, $1/n < a$.

Dokaz. Po 2 obstaja $n > \frac{1}{a}$, $n \in \mathbb{N}$,
torej je $1/n < a$. ■

Posledica. Za poljubna $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, obstaja $q \in \mathbb{Q}$,
da je $a < q < b$.

Dokaz.
- Če je $b - a > 1$, potem obstaja $m \in \mathbb{Z} : a < m < b$.

  $m_0 = \sup\{k \in \mathbb{Z}, k \leq a\}$

  Potem lahko vzamemo $m = m_0 + 1$
- ideja: če je $b - a \leq 1$, potem obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je

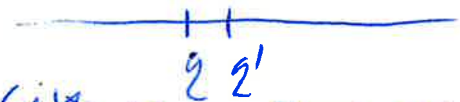
  $n(b-a) > 1$

  Po ravnokar dokazanem obstaja $m \in \mathbb{Z}$:

  $an < m < bn$, tj.

  $a < \frac{m}{n} < b$ ■

z rezi $A < B : \exists\, q \in B \setminus A$



$a \leq q^* \leq (q^*)^* < B$

∃ min = najv. elementa
$\exists q' \in B \setminus A$

INTERVALI

Definicija. Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

(1) $[a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$ imenujemo <u>zaprti interval</u>.

(2) $(a,b) = \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$ im. <u>odprti interval</u>

(3) $[a,b) = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\}$ im. polodprt interval

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\}$ im. polodprt interval

(4) $(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R},\ a < x\}$

$[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x\}$

$(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$

$(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R},\ x < a\}$

$(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq a\}$

Definicija. Naj bo $a \in \mathbb{R}$ in $\varepsilon > 0$.
Interval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ imenujemo ε-okolica števila a.

<u>Okolica točke</u> je vsaka množica, ki vsebuje kakšno ε-okolico točke a.

DECIMALNI ULOMKI

Vsako realno število lahko zapišemo kot (neskončni) decimalni ulomek:
Naj bo $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ in naj bo $n \in \mathbb{N}_0$ največje, ki ne presega x.
Tedaj je $x \in [n, n+1)$: tako število n obstaja po eni od posledic Dedekindovega aksioma. Interval $[n, n+1)$ razdelimo na 10 delov.
Poiščemo največje število $n_1 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, da velja

$$n + \frac{n_1}{10} \leq x.$$

Postopek nadaljujemo.

množica decimalnih približkov

Trditev. Naj bo $A = \{n, n + \frac{n_1}{10}, n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{100}, \dots\}$.

Tedaj je $x = \sup A$.

Dokaz. (1) x je zgornja meja mn. A po definiciji decim. približkov.

(2) denimo, da je $y = \sup A < x$.

Potem obstaja $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n} < x - y$.

Zato obstaja $p \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{10^p} < \frac{1}{n} < x - y$, tj.

$$\left.\begin{array}{l} y + \frac{1}{10^p} < x \\ \text{ker je } \quad n + \dots + \frac{n_p}{10^p} \leq y \end{array}\right\} \to \times$$

Opomba. Izrek: utemelji, da x lahko zapišemo kot neskončni decimalni ulomek:

$$x = n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{100} + \dots = n_0{,}n_1 n_2 n_3 \dots$$

Trditev. Naj bosta $x, y \in \mathbb{R}$: $x, y > 0$

$$\left.\begin{array}{l} \text{(1) Denimo, da obstaja } k \in \mathbb{N}, \text{ za katerega velja} \\ x = n_0{,}n_1 \dots n_{k-1} n_k 999 \dots \\ y = n_0{,}n_1 \dots n_{k-1} (n_k + 1) 000 \dots \quad \text{in } n_k \neq 9 \end{array}\right\} (*)$$

Potem je $x = y$

(2) Za dva različna decimalna zapisa števila $x \in \mathbb{R}$ velja $(*)$.

Dokaz (1) Naj bo $A = \{a_0, a_1, \dots\}$ množica decimalnih približkov za x.

- Potem je y zg. meja od A.

Zato je $y \geq x$.

- y je nat. zg. meja: Naj bo $\ell \geq k$: $y - a_\ell = \frac{1}{10^\ell}$, torej je $y - \frac{1}{10^\ell} \leq a_\ell$.

Zato najdemo število, ki je manjše od y in zg. meja od A.

torej je $y = \sup A = x$. $\boxtimes$

(2) Denimo, da sta $n_0' n_1 n_2 \dots$ in $m_0' m_1 m_2 \dots$ dva različna zapisa števila $x \in \mathbb{R}$.
Potem obstaja najmanjši indeks $k \in \mathbb{N}$; $\big/ \, n_k < m_k$. ($n_k \neq m_k$, lahko zamenjamo)
Potem je število $m_0' m_1 m_2 \dots m_k$ zg. meja mn. decimalnih približkov za x.

- Če bi veljalo $n_k < m_k - 1$, potem bi bilo

$$x \leq n_0' n_1 n_2 \dots (n_k+1) < m_0' m_1 m_2 \dots m_k \leq x \; \divideontimes .$$

če bi bil $m_{k+1} \neq 0$ (ali katerikoli večji indeks), bi bil $m_0' m_1 \dots m_k 0 \dots 0$ mns $\divideontimes$. $\quad x \leq m_0' m_1 m_2 \dots m_k < m_0' m_1 \dots m_k m_{k+1} \leq x$
če bi bil $n_{k+1} \leq 8$ (ali katerikoli večji indeks), bi bil $n_0' n_1 \dots n_k 9$ mns $\divideontimes$.

Podobni sklepi veljajo za druge osnove.

<u>Trditev</u>. Naj bo $x \in \mathbb{R}$.
x ima periodičen (ali končen) decimalni zapis $\Leftrightarrow x \in \mathbb{Q}$.

<u>Dokaz</u> ($\Rightarrow$) $x > 0$. $x = d' d_1 d_2 d_3 \dots \underbrace{\overline{d_k d_{k+1} \dots d_{k+m}}}_{m+1}$ za neki $k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$.

$$10^{m+1} x = 10^{m+1} d + d_1 \dots d_{m+1}' d_{m+2} \dots d_k \dots d_{k+m} \overline{d_k \dots d_{k+m}}$$

$$10^{m+1} x - x = a' a_1 a_2 \dots a_{k-1}$$

$$x = \frac{a' a_1 a_2 \dots a_{k-1}}{10^{m+1} - 1} \in \mathbb{Q}$$

($\Leftarrow$) $x \in \mathbb{Q} \overset{x>0}{:} \quad x = \frac{m}{n} \quad m, n \in \mathbb{N}$

$$m : n = d' d_1 \dots$$

n: ostankov $\left\{ \begin{array}{l} o_1 \\ o_2 \\ o_n \\ ? \end{array} \right.$
različni so $\{0, 1, \dots, n-1\}$
ali se je končalo, ali pa se ostanek ponovi

UPORABA AKSIOMA A13 ZA UVEDBO KORENOV IN LOGARITMA

Izrek. Za vsak $x \in \mathbb{R}, x > 0$, in za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja natanko eno pozitivno realno število y, za katero velja $y^n = x$. Oznaka: $y = \sqrt[n]{x}$.

Dokaz. enoličnost: $0 \le y_1 < y_2 \Rightarrow y_1^n < y_2^n$.

obstoj: $E := \{t \ge 0, t^n < x\}$.

Ker je $0 \in E$, $E \neq \emptyset$. E je navzgor omejena z $\max\{1, x\}$.

Zato obstaja $\sup E =: y$ (po A13).

Velja $y^n = x$.

Če $y^n \neq x$, potem velja bodisi $y^n < x$ bodisi $y^n > x$.

privzemimo $y^n < x$.

Za $0<a<b$ iz $(b^n - a^n) = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \dots + a^{n-1})$ sledi

$$b^n - a^n < (b-a) \cdot n \cdot b^{n-1}.$$

$$h>0: \quad (y+h)^n - y^n < h \cdot n \cdot (y+h)^{n-1} \underset{h<1}{\le} h \cdot n\,(y+1)^{n-1} \underset{h < \frac{x-y^n}{n(y+1)^{n-1}}}{<} x - y^n$$

Torej: za $h \in (0,1)$, $h < \frac{x-y^n}{n(y+1)^{n-1}}$ velja: $(y+h)^n < x$ ↯.

Podobno v 2. primeru.

Na podoben način vpeljemo logaritem:

Izrek. Za vsak $x \in \mathbb{R}, x > 0$, in za vsak $b > 0$, $b \neq 1$ obstaja natanko eno pozitivno realno število y za katero velja: $b^y = x$. Oznaka: $y = \log_b x$.

ABSOLUTNA VREDNOST

Definicija. Če je $x \in \mathbb{R}$, je $|x| = \begin{cases} x, & \text{če je } x \geq 0 \\ -x, & \text{če je } x < 0 \end{cases}$.

Število $|x|$ imenujemo <u>absolutna vrednost števila x</u>.

Trditev. Naj bo $x, y \in \mathbb{R}$. Velja:

(i) $|x| \geq 0$

(ii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(iii) $|-x| = |x|$

(iv) $-|x| \leq x \leq |x|$

(v) $|x|$ je razdalja od 0 do x. geometrijski pomen abs. vrednosti.

(vi) $|x+y| \leq |x| + |y|$ trikotniška neenakost

(vii) $|x||y| = |x \cdot y|$

(viii) $\sqrt{x^2} = |x|$

Dokaz (vi) pregledamo vse možnosti glede na predznak:

$x, y \geq 0$ ✓

$x, y \leq 0$ ✓

$x > 0, y < 0$: $|x| = x, \ |y| = -y \Rightarrow x + y = |x| - |y|$

Sledi: $|x+y| = \begin{cases} |x| - |y|, & |x| \geq |y| \\ |y| - |x|, & |x| < |y| \end{cases}$

Ker je $|x| - |y| \leq |x| + |y|$, $|y| - |x| \leq |x| + |y|$ sledi $|x+y| \leq |x| + |y|$.

$x > 0, y < 0$ podobno. $\blacksquare$

Posledica. 1) $\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

2) $|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n| \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

Dokaz 1) $\pm$ če velja za $+$ velja tudi za $-$.

$|x| = |x + y - y| \leq |x + y| + |y|$

sledi $|x| - |y| \leq |x + y|$

simetrično $|y| - |x| \leq |x + y|$

$\Rightarrow \big||x| - |y|\big| \leq |x + y|$ $\blacksquare$

(2) z indukcijo DN

KOMPLEKSNA ŠTEVILA

V $\mathbb{R}$ enačba $x^2 = a$ za $a < 0$ nima realne rešitve.

Definicija. Kompleksno število α je urejen par realnih števil (a, b). Množico vseh kompleksnih števil označimo s $\mathbb{C}$.

Opomba. 1) $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
2) $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c$ in $b = d$.

V $\mathbb{C}$ vpeljemo seštevanje in množenje:

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$: $\alpha = (a, b)$, $\beta = (c, d)$ kjer so $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$\alpha + \beta = (a + c, b + d)$ seštevanje po komponentah

$\alpha \cdot \beta = (ac - bd, ad + bc)$

Izrek. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je komutativen obseg. Enota za seštevanje je $0 = (0,0)$ in za množenje $1 = (1, 0)$.

Opomba. V $\mathbb{C}$ se ne da vpeljati urejenosti, da bi bil urejen obseg.

Dokaz (nekaterih aksiomov)

(A3) $\alpha + 0 = (a,b) + (0,0) = (a+0, b+0) = (a,b)$

(A4) $-\alpha := (-a, -b)$

$\alpha + (-\alpha) = (a,b) + (-a,-b) = (a-a, b-b) = (0,0)$

(A7) $\alpha \cdot 1 = (a,b) \cdot (1,0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a,b)$

(A8) Naj bo $\alpha \neq 0$. Torej $\alpha = (a, b)$ in $a^2 + b^2 > 0$.

Definirajmo $\alpha^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

$$\alpha \cdot \alpha^{-1} = (a, b)\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}, \frac{a(-b)}{a^2+b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2}\right) = 1$$

Opomba. Preslikava $a \mapsto (a, 0)$
$\mathbb{R} \to \mathbb{C}$
inducira vložitev realnih števil v množico kompleksnih števil.

Ker velja: $(a,0)+(b,0)=(a+b,0)$
in $(a,0)\cdot(b,0)=(ab,0)$
lahko kompleksna števila, ki so oblike $(a,0)$ identificiramo z realnimi: $a\equiv(a,0)$.

<u>Definicija</u>. Število $(0,1)$ označimo z i in imenujemo <u>imaginarna enota</u>.

<u>Velja</u>: $i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1$.
$$a+bi=(a,0)+(b,0)(0,1)=(a,0)+(0,b)=(a,b)$$

Zato lahko rečemo:
$$\mathbb{C}=\{a+bi;\ a,b\in\mathbb{R}\}.$$

<u>Definicija</u>. Naj bo $\alpha=a+bi\in\mathbb{C}$, kjer $a,b\in\mathbb{R}$.
Število a je <u>realni del kompleksnega števila</u> α: $a=\mathrm{Re}\,\alpha$,
Število b je <u>imaginarni del kompleksnega št α</u> $b=\mathrm{Im}\,\alpha$,
Število $a-ib$ je <u>konjugirano število števila</u> α.
Število $\sqrt{z\cdot\bar{z}}$ imenujemo <u>absolutna vrednost kompleksnega št</u> z in označimo $|z|=\sqrt{z\cdot\bar{z}}$.

<u>Opomba</u>. $\sqrt{z\cdot\bar{z}}=\sqrt{(a+bi)(a-bi)}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(\mathrm{Re}\,z)^2+(\mathrm{Im}\,z)^2}$

To pojasni, zakaj lahko uporabljamo enako oznako kot za abs. vrednost realnega števila: $|a|=|a+0i|$ za $a\in\mathbb{R}$.

<u>Trditev</u>. Za $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ velja:
(i) $\overline{\alpha+\beta}=\bar{\alpha}+\bar{\beta}$,
(ii) $\overline{\alpha\cdot\beta}=\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}$,
(iii) $\mathrm{Re}\,\alpha=\frac{1}{2}(\alpha+\bar{\alpha})$, $\mathrm{Im}\,\alpha=\frac{1}{2i}(\alpha-\bar{\alpha})$,
(iv) $z\cdot\bar{z}=(\mathrm{Re}\,z)^2+(\mathrm{Im}\,z)^2$.

Dokaz. (ii) $\alpha = a+ib$, $\beta = c+id$

$$\overline{\alpha\cdot\beta} = \overline{(a+ib)(c+id)} = \overline{(ac-bd+i(ad+bc))} =$$
$$= ac-bd-i(ad+bc).$$
$$\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta} = (a-ib)(c-id) = ac-bd-i(ad+bc)$$

(iii) Drugo podobno $\blacksquare$

Trditev. Naj bosta $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Tedaj velja:

(i) $|\alpha| \geq 0$

(ii) $|\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

(iii) $|\alpha| = |\overline{\alpha}|$

(iv) $|\alpha\cdot\beta| = |\alpha|\cdot|\beta|$

(v) $|\mathrm{Re}\,\alpha| \leq |\alpha|$, $|\mathrm{Im}\,\alpha| \leq |\alpha|$

(vi) $|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

$$\big||\alpha|-|\beta|\big| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

Dokaz. (i)–(iv) izračunamo (doma). (v) $|a| \leq \sqrt{a^2+b^2}$ ✓, kjer je $\alpha = a+ib$

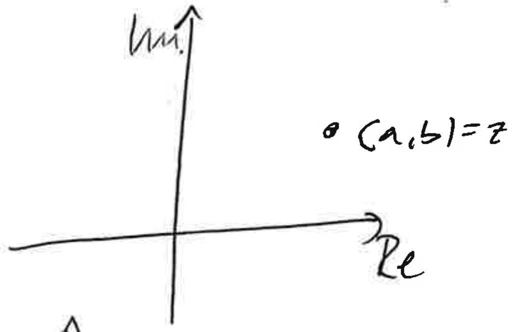
(vi) $|\alpha+\beta|^2 = (\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta}) = |\alpha|^2 \underline{+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta} + |\beta|^2$

$$(|\alpha|+|\beta|)^2 = |\alpha|^2+|\beta|^2 + \underline{2|\alpha|\cdot|\beta|}$$

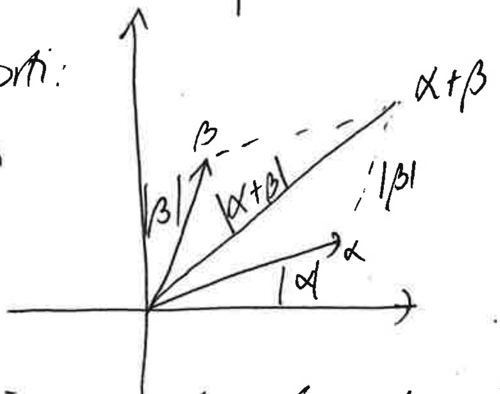
$$\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta = \alpha\overline{\beta} + \overline{(\alpha\overline{\beta})} = 2\,\mathrm{Re}(\alpha\overline{\beta}) \leq 2|\alpha\overline{\beta}| = 2|\alpha|\cdot|\beta|$$

GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA

Kompleksno število $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$ predstavimo s točko (a,b) v koordinatnem sistemu.



Ker kompleksna števila seštevamo po komponentah se to ujema s seštevanjem vektorjev.



Geometrijski pomen absolutne vrednosti:

$|\alpha| = \sqrt{(\mathrm{Re}\,\alpha)^2 + (\mathrm{Im}\,\alpha)^2}$ je razdalja do izhodišča (Pitagorov izrek).

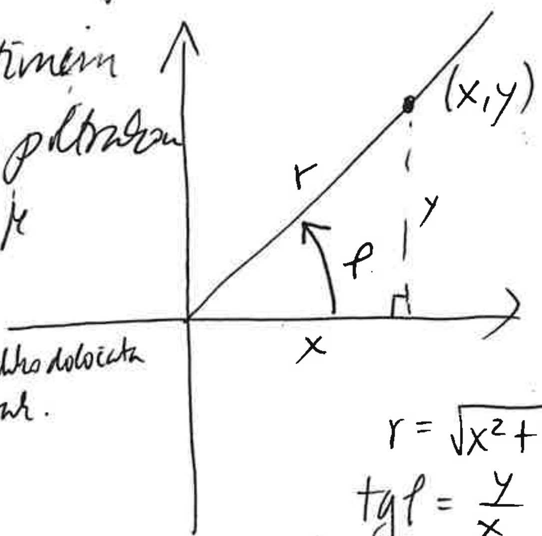
Kaj pove trikotniška neenakost?

Dolžina stranice v trikotniku je manjša od vsote dolžin drugih dveh stranic.

POLARNI OPIS

Lego točke v koordinatnem sistemu lahko podamo tudi s poltrakom skozi izhodišče in razdaljo do izhodišča.

Poltrak je določen s kotom med pozitivnim poltrakom abscisne osi in danim poltrakom merjeno v pozitivni smeri: to je smer, ki je nasprotna smeri vrtenja urinega kazalca.



Dva kota lahko določata isti poltrak.

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y}{x}$, $x \neq 0$

Velja: $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ … polarni zapis kompleksnega števila z.

φ je polarni kot (ni enoličen).

Če izberemo $\varphi \in [0, 2\pi)$ je φ enolični argument kompl. števila z.

φ in $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ določata isti poltrak.

Opomba. $|\cos\varphi + i\sin\varphi| = 1$.

To pomeni, da število $\cos\varphi + i\sin\varphi$ leži na enotski krožnici s središčem v izhodišču.

Množenje geometrično:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$$
$$z\cdot w = |z||w|(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) =$$
$$= |z|\cdot|w|(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)) =$$
$$= |z|\cdot|w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$$

Pri množenju kompleksnih števil se absolutni vrednosti zmnožita, kota pa seštejeta.

$$\bar{z} = |z|(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$$

Potenciranje: z indukcijo izpeljemo

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) \quad \ldots \text{ Moivreova formula}$$

Korenjenje: Za dani $z \in \mathbb{C}$ rešujemo enačbo: $w^n = z$.

z zapišemo v polarni obliki: $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

w iščemo v polarni obliki: $w = r(\cos\psi + i\sin\psi)$

$$r^n(\cos(n\psi) + i\sin(n\psi)) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Kompl. števili sta enaki natanko tedaj, kadar ležita na istem poltraku in sta enako oddaljeni od izhodišča:

$$r^n = |z|$$
$$n\psi = \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$r = \sqrt[n]{|z|} \quad \text{in} \quad \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n},$$

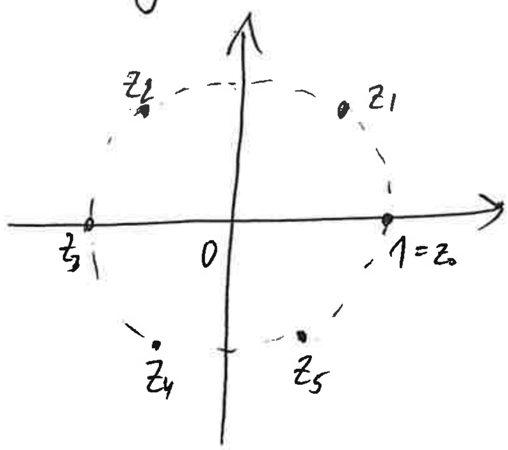
za $k = 0, 1, \ldots, n-1$ dobimo različne poltrake.

(Če $z \neq 0$) Dobimo n različnih n-tih korenov: $w = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$

Za $z=1$; imenujemo rešitve enačbe

$$w^n = 1$$ <u>koreni enote</u>.

Koreni enote sestavljajo oglišča pravilnega n-kotnika z oglišči na enotski krožnici:



$$(z_2)^6 = 1.$$

<u>Osnovni izrek algebre</u>. Vsak nekonstanten polinom s kompleksnimi koeficienti ima kompleksno ničlo.