O MNOŽICAH IN PRESLIKAVAH

__Definicija.__ Naj bosta A in B množici. __Preslikava f iz mn. A v mn. B__ je pravilo, ki vsakemu elementu iz množice A priredi natanko določen element iz množice B. Pišemo $f: A \to B$ in

$$a \mapsto f(a)$$

A imenujemo __definicijsko območje__ ali __domena__, B pa __kodomena__.

Množico $Z_f = \{f(a); a \in A\}$ imenujemo __zaloga vrednosti__ preslikave f.

__Definicija.__ Naj bosta A in B množici in $f: A \to B$ preslikava.

Pravimo, da je f __surjektivna__, če je $Z_f = B$.

Pravimo, da je f __injektivna__, če velja:

$\forall\ x, y \in A$ in $x \neq y$, potem je $f(x) \neq f(y)$.

Pravimo, da je f __bijektivna__, če je f injektivna in surjektivna.

__Opomba.__ f je injektivna $\Leftrightarrow$ (če je $f(x) = f(y)$ za $x, y \in A$, potem je $x = y$)

__Definicija.__ Naj bosta A in B množici in $f: A \to B$ bijektivna preslikava. Inverzna preslikava $f^{-1}: B \to A$, vsakemu elementu $b \in B$ priredi tisti element $a \in A$, za katerega velja, da je $f(a) = b$.

__Opomba.__ f^{-1} je dobro definirana: ker je f surjektivna, obstaja vsaj en a, da je $f(a) = b$. Ker je f injektivna, je a enolično določen.

Definicija. Naj bosta A in B množici.
Pravimo, da sta A in B ekvipotentni ali enako močni, kadar obstaja bijektivna preslikava $f: A \to B$.

Opomba. Končni množici imata enako moč, kadar imata enako število elementov.

Definicija. Če ima množica A enako moč kot $\mathbb{N}$, pravimo, da je A števno neskončna.

Če je A števno neskončna, potem obstaja bijekcija $f: \mathbb{N} \to A$, $n \mapsto f(n) = a_n \in A$

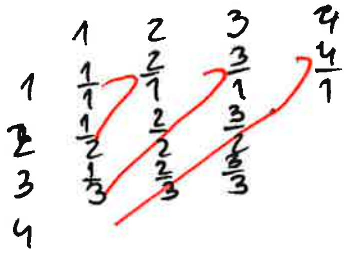
Torej A lahko zapišemo kot
$A = \{a_1, a_2, \ldots\}$, pri čemer za $j \neq k$ velja $a_j \neq a_k$.

Izrek: $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ sta števno neskončni.
$\mathbb{R}$ ni števno neskončna.

Dokaz. $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & -1 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$\mathbb{Q}$



ponovitve izpustimo

$\mathbb{R}$ Denimo, da je $\mathbb{R}$ števno neskončna.
Potem lahko realna števila razvrstimo v zaporedje:
$\{x_1, x_2, \ldots\} = \mathbb{R}$. x_j zapišemo kot decimalni ulomek

$x_1 = d_1{,}d_{11}d_{12}d_{13}\ldots$
$x_2 = d_2{,}d_{21}d_{22}\ldots$
$x_3 = d_3{,}d_{31}d_{32}\ldots$

definiramo:

$x = 0{,}n_1 n_2 n_3 \ldots$ pri čemer

če je $d_{11} = 0$, je $n_1 = 1$, sicer $n_1 = 0$
če je $d_{22} = 0$, je $n_2 = 1$, sicer $n_2 = 0$
$x \neq x_j$ za noben j $\to$

ŠTEVILSKA ZAPOREDJA

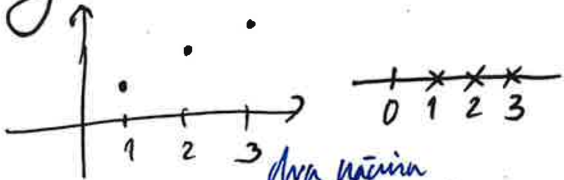
<u>Definicija</u>. <u>Zaporedje realnih števil</u> je preslikava iz $\mathbb{N}$ v $\mathbb{R}$.

<u>Zapis</u>. Če označimo $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, zapišemo

$$f(n) = a_n$$

Zaporedje običajno podamo kar s členi $a_1, a_2, \ldots$,
kar krajše zapišemo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ali $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
a_n imenujemo <u>n-ti člen zaporedja</u>.

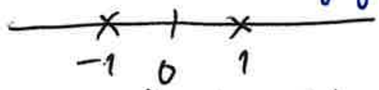
<u>PAZI</u>: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ni množica: $1, 1, 1, \ldots$ je zaporedje,
ki ustreza konstantni funkciji $f(n) = 1$ za vse $n \in \mathbb{N}$.



<u>Zgled</u>. 1) $a_n = n$ za vse $n \in \mathbb{N}$
$a_1 = 1, a_2 = 2, \ldots$

dva načina grafičnega prikaza

2) $b_n = (-1)^n$ za vse $n \in \mathbb{N}$
$-1, 1, -1, 1, \ldots$ zaporedje, podano s splošnim členom



3) rekurzivno podano zaporedje:
$c_0 = 1,\ c_1 = 1$
$c_{n+1} = c_n + c_{n-1}$ za vse $n \in \mathbb{N}$.
$c_2 = 2, c_3 = 3, c_4 = 5, \ldots$ Fibonaccijevo zaporedje.

zgodba o zajcih: pristanovi 1 m[illegible] se parijo, po 1 mesecu rodijo.

4) aritmetično zaporedje:
$a_n = a_0 + nd$, $n \in \mathbb{N}$

5) geometrijsko zaporedje
$a_n = a_0 \cdot k^n$, $n \in \mathbb{N}$

<u>Definicija</u>. Zaporedje a_n je <u>navzgor omejeno</u>, če je zaloga vrednosti preslikave $n \mapsto a_n$ $(n \in \mathbb{R})$ navzgor omejena, tj. če obstaja $M \in \mathbb{R}$, da je $a_n \leq M$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Podobno <u>navzdol omejeno</u>.

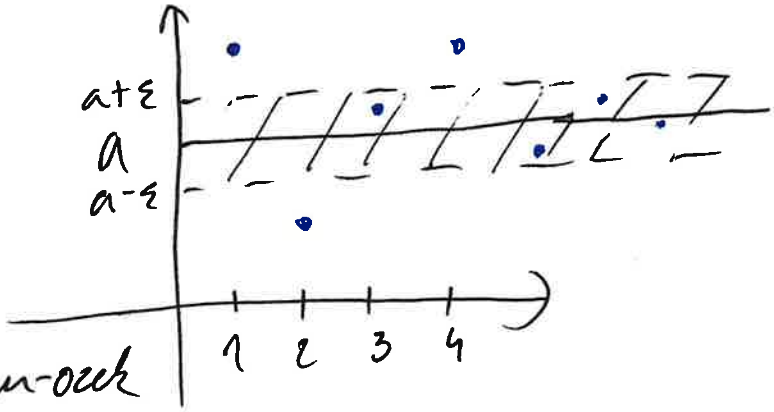
<u>Natančna zgornja meja</u> $\sup a_n$ navzgor omejenega zaporedja a_n je natančna zgornja meja zaloge vrednosti $n \mapsto a_n$ $(n \in \mathbb{R})$. Označimo jo s $\sup a_n$. Podobno natančna sp. meja.

<u>Primer</u>. $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$
a_n je navzdol om. z 0, navzgor om. z 1
$\inf a_n = 0$, $\sup a_n = \max a_n = 1$.

Definicija. Zaporedje a_n konvergira proti $a \in \mathbb{R}$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $M \in \mathbb{N}$, da je $|a_n - a| < \varepsilon$ za vse $n \geq M$.
Število a imenujemo limita zaporedja a_n in označimo

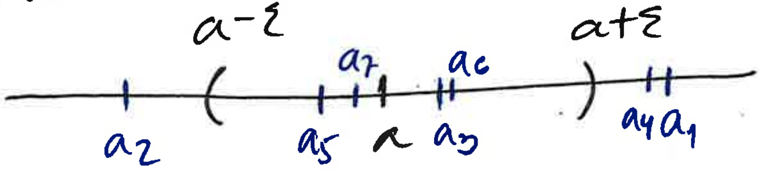
$$a = \lim_{n\to\infty} a_n .$$

Če zaporedje konvergira, pravimo da je konvergentno zaporedje, sicer je divergentno zaporedje.



od nekega člena dalje vsi členi zaporedja ležijo v ε-traku okrog a.
Ta lastnost je izpolnjena ne glede na to, kako majhen-ozek trak vzamemo.

Da so od nekega člena dalje vsi znotraj ε-okolice je ekvivalentno temu, da jih je zunaj končno mnogo.



Zapis: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ pomeni: zaporedje a_n je konvergentno in njegova limita je a.

Zaporedje a_n ne konvergira proti a $\Leftrightarrow$ (a_n ne konvergira ali a_n konvergira, ampak limita a_n ni a).

Primer. 1) $a_n = 1$ za vse $n \in \mathbb{N}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

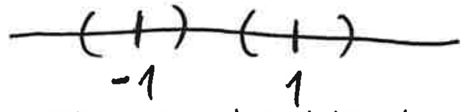
uporabimo arhimedsko lastnost

3) Zaporedje $b_n = (-1)^n$ je divergentno.
Denimo, da je x njegova limita. Potem obstaja M iz definicije za $\varepsilon = \frac{1}{2}$

limite:

za $n=2k,\ k\in\mathbb{N}$: $\quad |b_n - x| = |1-x| < \frac{1}{2}$

$n=2k+1,\ k\in\mathbb{N}$: $\quad |b_n - x| = |-1-x| = |1+x| < \frac{1}{2}$.



$$|1-(-1)| = 2 = |1-x-(-1-x)| \le |1-x| + |1+x| < \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1$$

Trditev. Konvergentno zaporedje ima eno samo limito.

Dokaz. Recimo, da sta a in b limiti konvergentnega zaporedja a_n. Izberemo polj. $\varepsilon > 0$.
Po definiciji obstajata $M_1, M_2 \in \mathbb{N}$ da velja:

če je $n \geq M_1$, potem $|a_n - a| < \varepsilon$

če je $n \geq M_2$, potem $|a_n - b| < \varepsilon$

Za $n \geq \max\{M_1, M_2\}$ velja:

$$|a-b| = |a - a_n + a_n - b| \le$$
$$\le |a-a_n| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Ker je $|a-b| < 2\varepsilon$ za vsak $\varepsilon > 0$, je $|a-b| = 0$, tj. $a=b$ ■

Trditev. Konvergentno zaporedje je omejeno.

Dokaz. Recimo, da je $\{a_n\}$ konvergentno zaporedje z limito a. Obstaja $M \in \mathbb{N}$:
$$|a_n - a| < 1 \text{ za vse } n \geq M.$$
$$|a_n| = |a_n - a + a| \le |a_n - a| + |a| < |a| + 1$$
Torej je $\max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n-1}|, |a|+1\}$ zg. meja a_n. ■

6.11.17

Opomba. Ni vsako omejeno zaporedje konvergentno.

Primer. $(-1)^n$

Definicija. Naj bo a_n zaporedje. Število $s \in \mathbb{R}$ je __stekališče__ zaporedja a_n, če v vsaki okolici števila s leži neskončno mnogo členov zaporedja.

Opomba. 1) s je stekališče $\Leftrightarrow$ za vsak $\varepsilon > 0$ velja $|a_n - s| < \varepsilon$ za neskončno mnogo indeksov n.

2) Če je zapor. konvergentno, je njegova limita tudi edino stekališče zaporedja.

Primer. 1) $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}, \ldots$; 2) $(-1)^n$

poiščí zapor z enim, tremi, ... stekališči

Trditev. Če vsaka okolica števila $s \in \mathbb{R}$ vsebuje člen zaporedja a_n, različen od s, potem je s stekališče od a_n.

Dokaz. $\varepsilon > 0$. Obstaja $a_{n_1} \in (s-\varepsilon, s+\varepsilon)$, $a_{n_1} \neq s$.

$d_1 = |s - a_{n_1}|$

Obstaja $a_{n_2} \in (s - d_1, s + d_1)$, $a_{n_2} \neq s$

Postopek nadaljujemo. $\boxed{}$

Izrek. Vsako omejeno zaporedje ima stekališče.

Dokaz. Naj bo m sp. meja zaporedja a_n, M pa natančna zg. meja.

$\mathcal{U} := \{ u \in \mathbb{R};\ a_n < u$ je izpolnjena za največ končno mnogo členov zaporedja $\}$

Ker je $m \in \mathcal{U}$, $\Rightarrow \mathcal{U} \neq \emptyset$.

Ker je a_n navzgor omejeno, je $\mathcal{U}$ navzgor omejena;

Zato obstaja $\sup \mathcal{U} =: a$.

Če je $b \in \mathcal{U}$, so tudi vsa manjša števila od b v $\mathcal{U}$.

Zato so vsa števila, ki so manjša od a, v $\mathcal{U}$.

Dokažimo, da je $\underline{a}$ stekališče $\underline{a_n}$

Izb. $\varepsilon > 0$: ker je $a - \frac{\varepsilon}{2} \in \mathcal{U}$, $a + \frac{\varepsilon}{2} \notin \mathcal{U}$, je levo od $a + \frac{\varepsilon}{2}$ neskončno členov zaporedja, levo od $a - \frac{\varepsilon}{2}$ pa končno.

Torej je na $[a - \varepsilon/2, a + \varepsilon/2)$ neskončno členov zaporedja $\boxed{}$

MONOTONA ZAPOREDJA

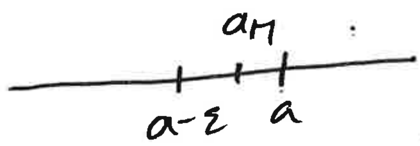
Definicija. Zaporedje a_n je naraščajoče, če velja $a_{n+1} \geq a_n$ za vse $n \in \mathbb{N}$.
Zaporedje a_n je padajoče, če velja $a_{n+1} \leq a_n$ za vse $n \in \mathbb{N}$.
Zaporedje a_n je monotono, če je naraščajoče ali padajoče.
strogo naraščajoče, če je $a_{n+1} > a_n$ $\forall n$.

Primeri. $\frac{1}{n}$ je padajoče

konstantno zaporedje je naraščajoče in padajoče.
$(-1)^n$ ni monotono zaporedje.

Izrek. Monotono zaporedje je konvergentno natanko tedaj, kadar je omejeno.
Če je a_n naraščajoče in navzgor omejeno, potem je
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n$.
Če je a_n padajoče in navzdol omejeno, potem je
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf a_n$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) smo že dokazali.
($\Leftarrow$) denimo, da je a_n naraščajoče in omejeno.
Naj bo $a = \sup a_n$ (ki obstaja, ker je a_n omejeno).
Izberimo polj. $\varepsilon > 0$. Obstaja $M \in \mathbb{N}$,
da je $a_M > a - \varepsilon$.



Ker je a_n naraščajoče, velja:

$$|a_n - a| = a - a_n \leq a - a_M < \varepsilon \text{ za vse } n \in \mathbb{N},\ n > M.$$

Torej zaporedje a_n konvergira proti a. ■

Primer. $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$: $b_n > 0$, padajoče, navzdol omejeno.
Zato je konvergentno. Izberimo $c \geq 0$: $c \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ za vse $n \in \mathbb{N}$.
$c^2 \leq \frac{1}{n} \Rightarrow c = 0$ (Arh. lastnost) ■

PODZAPOREDJA

Podzaporedje zaporedja x_n je zaporedje, ki vsebuje samo nekatere člene zaporedja x_n v enakem vrstnem redu:

<u>Definicija</u>. Naj bo x_n zaporedje in naj bo n_j strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil. Zaporedje $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ imenujemo <u>podzaporedje</u> v zaporedju $\{x_n\}$.

<u>Primer</u>. 1) $x_n = \frac{1}{n}$

$\frac{1}{3n}$ je podzaporedje.

2) x_n zaporedje.

Zaporedje $x_N, x_{N+1}, \dots$ je podzaporedje v zaporedju x_n.
Imenujemo ga <u>rep zaporedja x_n</u>.

3) $x_n = (-1)^n$. $1, 1, 1, \dots$ je podzaporedje.

<u>Trditev</u>. Naj bo x_n zaporedje.
Če je x_n konvergentno, potem je konvergentno tudi vsako njegovo podzaporedje x_{n_j} in velja:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{j\to\infty} x_{n_j}.$$

<u>Posledica</u>. Vsak rep konvergentnega zaporedja je konvergentno zaporedje.

<u>Dokaz</u>. Označimo $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Izb. $\varepsilon > 0$. Obstaja $M \in \mathbb{R}$: $|x_n - x| < \varepsilon$ za vsak $n \geq M$.

Potem velja $|x_{n_i} - x| < \varepsilon$ za vsak $n_i \geq M$, kar je gotovo res za $\forall i \geq M$. ∎

<u>Opomba</u>. Če neko podzaporedje danega zaporedja konvergira, ni nujno res, da bi zaporedje konvergiralo. (Primer 3).

+ IZREK NA STRANI 211
+ OBA DRUGI

RAČUNANJE Z ZAPOREDJI

<u>Izrek</u>. Naj bosta a_n in b_n konvergentni zaporedji. Tedaj konvergirajo tudi zaporedja:

$a_1+b_1, a_2+b_2, \dots$ vsota zaporedij

$a_1-b_1, a_2-b_2, \dots$ razlika zaporedij

$a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots$ produkt zaporedij.

in velja

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n$$

<u>Dokaz</u>. Označimo $a=\lim_{n\to\infty}a_n$ in $b=\lim_{n\to\infty}b_n$.

(a) Naj bo $\varepsilon>0$.

$$|(a_n+b_n)-(a+b)|=|a_n-a+b_n-b|\le|a_n-a|+|b_n-b|$$

Obstajata M_1, M_2:

če je $n\geq M_1$: $|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$

če je $n\geq M_2$: $|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}$

Torej: če je $n\geq\max\{M_1,M_2\}$: $|(a_n+b_n)-(a+b)|<\varepsilon$.

(b) razlika podobno

(c) $|a_n\cdot b_n-a\cdot b|=|a_n\cdot b_n-a_nb+a_n\cdot b-a\cdot b|=$

$$=|a_n||b_n-b|+|b||a_n-a|$$

Ker je a_n konverg., je omejeno, zato obstaja $A>0$: $|a_n|\le A$ $\forall n$.

Ker $b_n\xrightarrow[n\to\infty]{}b$ obstaja M_b: $n\geq M_b$: $|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2A}$

Ker $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}a$ obstaja M_a: $n\geq M_a$: $|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2|b|}$.

Sledi: $|a_n\cdot b_n-a\cdot b|<\varepsilon$. $\boxtimes$

Posledica. Če je a_n konvergentno zaporedje in $\lambda\in\mathbb{R}$, potem je zaporedje $\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots$ konvergentno in velja

$$\lim_{n\to\infty}\lambda a_n = \lambda\lim_{n\to\infty} a_n.$$

Dokaz. (λ) je konverg. zapor. in produkt.

Opomba. Ker veljajo pravila za dva člena, veljajo tudi za končno mnogo.

Izrek. Naj bo a_n konvergentno zaporedje, $a_n\neq 0$ za vsak n in naj bo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\neq 0$. Potem je zaporedje

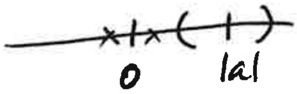
$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots$$

konvergentno in velja $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$.

Dokaz. Označimo $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

$$\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{a_n}\right| = \left|\frac{a_n-a}{a\cdot a_n}\right| = \frac{|a-a_n|}{|a|\cdot|a_n|}$$

<u>obstaja $m>0$, da je $|a_n|\geq m$ za vse n</u>



ker je $a\neq 0$ na intervalu $\left(a-\frac{|a|}{2}, a+\frac{|a|}{2}\right)$ ležijo vsi členi zaporedja od nekje dalje. Prvih nekaj je od 0 različnih, zato jih lahko omejimo stran od 0:

tj. $\exists M: a_n\in\left(a-\frac{|a|}{2}, a+\frac{|a|}{2}\right)\ \forall n\geq M$

$$m=\min\left\{\frac{|a|}{2}, |a_1|, \ldots, |a_M|\right\}.$$

Torej je $\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{a_n}\right| = \frac{|a-a_n|}{|a|\cdot|a_n|} \leq \frac{|a-a_n|}{|a|\cdot m} < \varepsilon$

obstaja M_1: $|a-a_n|<|a|m\varepsilon$ za vse $n\geq M_1$.

∎

Posledica. Če sta a_n in b_n konvergentni zaporedji, $b_n\neq 0\ \forall n$ in $\lim\limits_{n\to\infty} b_n\neq 0$, potem zaporedje $\frac{a_n}{b_n}$ konvergira in velja $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$

Primer. 1) $a_n = \dfrac{n^3 - n^2 + 1}{2n^3 + n}$

$$a_n = \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}}{2 + \frac{1}{n^2}} \quad \ldots$$

Izrek o sendviču. Naj bodo a_n, b_n in c_n taka zaporedja, da

$$a_n \le b_n \le c_n \quad \text{za vse } n \in \mathbb{N}.$$

Če sta zaporedji a_n in c_n konvergentni in

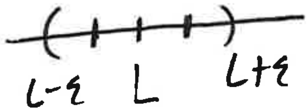
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n,$$

potem je zaporedje b_n konvergentno in

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

(račun primera)

Dokaz. Naj bo $L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$ in $\varepsilon > 0$.



Obstajata M_a in M_c:

za $n \ge M_a$: $|a_n - L| < \varepsilon$

za $n \ge M_c$: $|c_n - L| < \varepsilon$

če je $n \ge \max\{M_a, M_c\}$:

$$L - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < L + \varepsilon$$

Sledi b_n je konvergentno in $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Primer. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Ali konvergira in izračunaj limito!

$$0 \le a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$$

(že vemo, primer pri monot. zap.)

$$\underset{n\to\infty}{\downarrow} 0 \qquad \qquad \underset{n\to\infty}{\downarrow} 0$$

Torej $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Trditev. Naj bosta a_n in b_n konvergentni zaporedji. Če je $a_n \le b_n$ za vsak n, potem

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n .$$

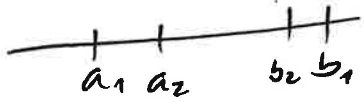
Primer Z10'5

Izrek. Naj bo $I_n = [a_n, b_n]$, $a_n < b_n$ zaporedje vloženih zaprtih intervalov, tj. $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Denimo, da zaporedje njihovih dolžin konvergira proti 0:

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0.$$

Tedaj obstaja natanko eno število $c \in I_n$ za vsak n, tj.

$$\{c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n .$$



Dokaz. a_n je naraščajoče in navzgor omejeno z b_1; zato konvergira.
b_n je padajoče in navzdol om., zato kon.

$$0 = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} b_n}_{= c} - \lim_{n\to\infty} a_n .$$

ker $a_n \uparrow c$, $b_n \downarrow c$ [illegible]

$c \in I_n$ za $\forall n$. $\boxed{Z}$

Izrek. Naj bo a_n zaporedje. Število $s \in \mathbb{R}$ je stekališče a_n natanko tedaj, kadar obstaja podzaporedje, ki konvergira proti s.

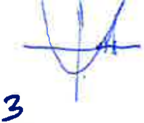
Dokaz ($\Leftarrow$) Če je a_{n_k} podzaporedje, ki konvergira proti s, potem v vsaki okolici s ležijo vsi členi tega zaporedja razen končno mnogo, tj. v vsaki okolici leži ~~ne~~ neskončno členov a_n.

($\Rightarrow$) naj bo s stekališče a_n. $U_n := (s - \frac{1}{n}, s + \frac{1}{n})$.

$\exists\, a_{n_1} \in U_1$.

V U_2 leži neskončno členov zaporedja a_n.

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$; $f(x)=x^2-2$



Primer. $x_1=2$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-2}{2x_n}=\frac{x_n^2+2}{2x_n}$$

$x_1=2$

$x_2=2-\frac{2}{4}=\frac{3}{2}$

$x_3=\frac{3}{2}-\frac{\frac{9}{4}-2}{2\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{12}$

Zaporedje je dobro definirano:

$x_n>0$

$n=1$ ✓

$n\to n+1$: $x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-2}{2x_n}=\frac{2x_n^2-x_n^2+2}{2x_n}=\frac{x_n^2+2}{2x_n}>0.$

x_n je padajoče

dovolj je dokazati, da je $x_n^2-2\geq 0 \ \forall n$.

$$x_1^2-2>0$$

$$x_{n+1}^2-2=\left(x_n-\frac{x_n^2-2}{2x_n}\right)^2-2=\frac{x_n^4+4x_n^2+4-8x_n^2}{4x_n^2}=$$

$$=\frac{(x_n^2-2)^2}{4x_n^2}>0.$$

x_n je padajoče in nenegativno, zato je konvergentno.
Ker je x_n konv., je x_{n+1} konverg. (rep) in velja

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim_{n\to\infty} x_n=:x$$

Velja: $2x_nx_{n+1}=2x_n^2-x_n^2+2=x_n^2+2$

Iz pravil za rač. s konverg. zaporedji izpeljemo:

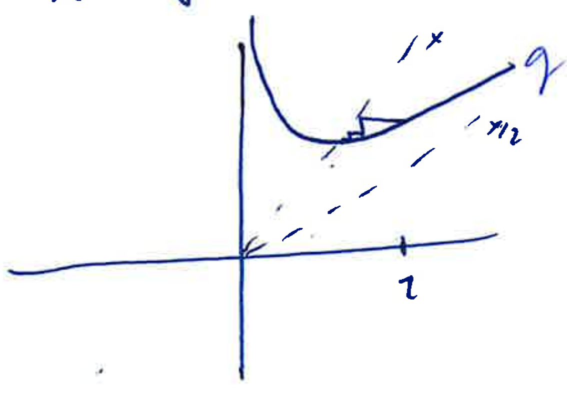
$$2x^2=x^2+2$$

$$x^2=2$$

$$x=\pm\sqrt{2}.$$

Ker so členi pozitivni, $x=\sqrt{2}$.

To je Newtonova metoda za iskanje približkov $\sqrt{2}$.



$g(x)=\frac{x^2+2}{2x}$

ZN'5

Zato obstaja $n_2 > n_1$, $a_{n_2} \in U_2$.

Induktivno konstr. zapor a_{n_k}.

Denimo, da smo že konstruirali $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}$,

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k \quad \text{in} \quad a_{n_j} \in U_j \ \forall j.$$

V U_{k+1} leži neskončno mnogo členov zaporedja,

zato obstaja $n_{k+1} > n_k$ in $a_{n_{k+1}} \in U_{k+1}$.

Tr. $\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = s$

Naj bo $\varepsilon > 0$. Obstaja K: $\frac{1}{K} < \varepsilon$.

Tedaj velja $a_{n_k} \in \underset{(s-\varepsilon, s+\varepsilon)}{U_k \atop \cap}$ za vse $k \geq K$

$\blacksquare$

CAUCHYJEV POGOJ

Zanima nas, kako bi samo s členi zaporedja, ne da bi omenili limito, opisali, da je zaporedje konvergentno.

<u>Definicija</u>. Zaporedje a_n izpolnjuje <u>Cauchyjev pogoj</u>,

če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $M \in \mathbb{N}$, da

za vsak $n, m \geq M$ velja $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Če zaporedje a_n izpolnjuje Cauchyjev pogoj, pravimo, da je zaporedje a_n <u>Cauchyjevo</u>.

<u>Izrek</u>. Zaporedje $\cdot$ je konvergentno natanko tedaj kadar izpolnjuje Cauchyjev pogoj.

Dokaz (⇒) denimo, da $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

$\varepsilon > 0$. Potem obstaja $M \in \mathbb{N}$:

$|a_n - a| < \varepsilon$ za vse $n \geq M$.

Naj bosta $m, n \geq M$: $|a_m - a_n| = |a_n - a + a - a_m| \leq$

$\leq |a_n - a| + |a - a_m| < 2\varepsilon$ ∎

(⇐) denimo, da a_n ustreza Cauchyjevemu pogoju.

Tedaj je a_n omejeno

obstaja M: $|a_n - a_m| < 1$ za vse $n, m \geq M$.

Torej je $|a_M - a_m| < 1$ za vse $m \geq M$.

Torej vsi členi zaporedja, razen $a_1, a_2, \dots, a_{M-1}$ ležijo na $(a_M - 1, a_M + 1)$, zato je zaporedje a_n omejeno.

Vsako omejeno zaporedje ima stekališče. Naj bo s stekališče a_n.

Trdimo: s je limita zaporedja a_n

izberimo $\varepsilon > 0$. Če bi bilo zunaj $(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$ neskončno mnogo členov zaporedja, bi obstajalo zunaj $(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$ podzaporedje danega zaporedja $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$ Ker je $(a_n)_n$ omejeno, je $(a_{n_k})_k$ omejeno, zato ima (a_{n_k}) stekališče t. Stekališče podzaporedja je tudi stekališče zaporedja a_n. Ker je $|a_{n_k} - s| \geq \varepsilon \ \forall k$, je $|t - s| \geq \varepsilon$.

Cauchyjevo zaporedje nima dveh različnih stekališč

če sta t in s, $t \neq s$ stekališči C. zaporedja in $|t - s| \geq \varepsilon$.

Na $(t - \frac{\varepsilon}{3}, t + \frac{\varepsilon}{3})$ in na $(s - \frac{\varepsilon}{3}, s + \frac{\varepsilon}{3})$ leži neskončno mnogo členov a_n.

Ker je a_n Cauchy: $\exists M$: $m, n \geq M$ $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Obstaja $m \geq M$: $a_m \in (t - \frac{\varepsilon}{3}, t + \frac{\varepsilon}{3})$ in $n \geq M$ $a_n \in (s - \frac{\varepsilon}{3}, s + \frac{\varepsilon}{3})$: $|a_n - a_m| \geq \frac{\varepsilon}{3}$

Dokazali smo tudi:

<u>Izr.</u> Omejeno zaporedje, ki ima eno samo stekališče, je konvergentno.

<u>Opomba.</u> Če zaporedje ni omejeno, to ni nujno res:

$$1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, \ldots$$

ZGORNJA IN SPODNJA LIMITA, LIMITI V ∞

<u>Definicija.</u> Pravimo, da zaporedje <u>a_n konvergira proti ∞</u>, če za vsak $K \in \mathbb{R}$ obstaja $m_0 \in \mathbb{N}$, da je

$$a_n > K \text{ za vse } n \geq m_0.$$

V tem primeru pišemo $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$.

Podobno: <u>konvergira proti $-\infty$</u>.

<u>Opomba.</u> Zaporedij, ki konvergirajo proti ∞ ali proti $-\infty$, ne štejemo med konvergentna zaporedja.

<u>Definicija.</u> Naj bo a_n omejeno zaporedje in S množica njegovih stekališč. Natančno zg. mejo mn. S imenujemo <u>zgornja limita</u> ali <u>limes superior</u> in pišemo

$$\limsup_{n \to \infty} a_n = \overline{\lim_{n \to \infty}} a_n = \sup S.$$

<u>Spodnja limita</u> ali <u>limes inferior</u> je

$$\liminf_{n \to \infty} a_n = \underline{\lim_{n \to \infty}} a_n = \inf S.$$

<u>Opomba.</u> Če je a_n omejeno zaporedje, je S omejena. Ker ima vsako omejeno zaporedje stekališče je neprazna. Torej $\sup S$ in $\inf S$ obstajata.

Trditev. Naj bo a_n omejeno zaporedje in S množica njegovih stekališč. Tedaj je $s = \limsup_{n\to\infty} a_n = \sup S$ natanko tedaj, kadar za vsak $\varepsilon > 0$ velja

($\ast$) $a_n > s+\varepsilon$ za kvečjemu končno mnogo indeksov n in $a_n > s-\varepsilon$ za neskončno mnogo indeksov n.

Trditev. Podobno za $\liminf$. // **Posledica** $\limsup a_n$ je največje stekališče a_n.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Če bi za nek $\varepsilon > 0$ bila neenakost $a_n > s+\varepsilon$ izpolnjena za neskončno indeksov n, bi obstajalo omejeno podzaporedje a_{n_j},

$a_{n_j} > s+\varepsilon$ za vsak j.

Potem ima a_{n_j} stekališče d, ki je tudi stekališče a_n.

Ker je $d \geq s+\varepsilon$ $\rightarrow\!\!\!\!\times$.

($\Leftarrow$) Ker iz pogoja sledi, da za vsak $\varepsilon > 0$ na intervalu $(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$ leži neskončno mnogo členov zaporedja, je s stekališče a_n: $s \in S$.

Denimo, da obstaja $x \in S$, $x > s$.

Potem obstaja $\varepsilon > 0$: $s \notin (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ in na tej okolici leži neskončno mnogo členov zaporedja. To pa je v protislovju z ($\ast$).

Trditev. Naj bo a_n omejeno zaporedje. Tedaj velja:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_n \left(\sup_{k\geq n} a_k\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k\geq n} a_k\right).$$

Skica dokaza. $\sup_{k\geq n} a_k = b_n$ je padajoče zaporedje. Ker je a_n omejeno, je omejeno. Zato je konvergentno in njegova limita je $\inf_n(\sup_{k\geq n} a_k) = b$

Za vsak $\varepsilon > 0$: $b_n > b+\varepsilon$ za končno mnogo (ker je padajoče)

$b_n > b-\varepsilon$ zavse.

Trditev. Naj bosta a_n in b_n omejeni zaporedji. Če velja $a_n \le b_n$ za vsak n, potem velja:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \le \liminf_{n\to\infty} b_n .$$

Definicija. (a) Naj bo a_n navzgor neomejeno zap. Tedaj pišemo

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty .$$

(b) Naj bo zaporedje a_n navzdol neomejeno. Tedaj pišemo

$$\liminf_{n\to\infty} = -\infty.$$

(c) Naj bo a_n navzgor neomejeno in navzdol omejeno.

Tedaj pišemo:

če je množica stekališč S neprazna

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \inf S,$$

sicer $\liminf_{n\to\infty} a_n = \infty$.

(d) Če je a_n navzgor omejeno in navzdol neomejeno.

Tedaj pišemo: če je množica stekališč S neprazna,

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup S,$$

sicer pišemo $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Primer. $1, 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \ldots$

NEKAJ POSEBNIH ZAPOREDIJ

Trditev. Naj bo $a \in \mathbb{R}$.

1) Če je $|a|<1$, potem je $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$

2) Če je $a>1$, potem je $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$.

Dokaz. 1) če $a\in(0,1)$: $a^{n+1} = a\cdot a^n < a^n$.

a^n je padajoče in navzdol omejeno z 0, zato je konv.

$L = \lim\limits_{n\to\infty} a^n$.

Iz $a^{n+1} = a\cdot a^n$ dobimo $L^{n+1} = aL^n \Rightarrow 0 = L$.

ker $a\neq 1$

$a\in(-1,0)$: Iz: $-|a|^n \leq a^n \leq |a|^n$ in $\lim\limits_{n\to\infty} |a|^n = 0$,

po izreku o sendviču sledi $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.

2) $a>1$: a^n je naraščajoče. Če bi bilo omejeno, bi bilo konvergentno in kot v 1 dobimo $L=0$, kar ni mogoče. Torej je a^n neomejeno.

∎

Trditev. Za vsak $a>0$ in vsak $m\in\mathbb{N}$ obstaja natanko en x: $x^m = a$. Pišemo: $x = \sqrt[m]{a}$.

Dokaz. (vaje)

Opomba. 1) Lastnosti korenov: $0<a<b \Rightarrow \sqrt[m]{a} < \sqrt[m]{b}$.

2) $a>0, b>0, m,n,p,q\in\mathbb{N}$: $\sqrt[m]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, $\sqrt[np]{a^{nq}} = \sqrt[p]{a^q}$.

$\sqrt[p]{a^q}\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[pn]{a^{qn}}\sqrt[pn]{a^{mp}} = \sqrt[pn]{a^{qn+mp}}$

Trditev. Za $x\in\mathbb{R}, x>0$ velja $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x} = 1$.

Dokaz. $a>1$: $a^n < a^{n+1} \Rightarrow$

$\sqrt[n(n+1)]{a^n} < \sqrt[n(n+1)]{a^{n+1}} \Rightarrow$

$\sqrt[n+1]{a} < \sqrt[n]{a}$

Zato je zapor. $\sqrt[n]{a}$ padajoče in navzdol omejeno z 1.

Če bi bila $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = L > 1$. Tedaj $\sqrt[n]{a} \geq L$ $\forall n$

$a \geq L^n$, kar je za $L>1$ neom → z!

Izrek. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Dokaz. $n = (\sqrt[n]{n})^n = (1 + (\sqrt[n]{n}-1))^n =$

$$= 1 + \binom{n}{1}(\sqrt[n]{n}-1) + \binom{n}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2 + \dots \geq \binom{n}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2 = \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2$$

Dobimo: $0 \leq (\sqrt[n]{n}-1)^2 \leq \frac{2}{n-1}$

Zato $0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 \leq \frac{2}{\sqrt{n-1}}$

$$\underset{0}{\downarrow}{\scriptstyle n\to\infty} \qquad \underset{0}{\downarrow}{\scriptstyle n\to\infty}$$

Zato $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ ▨

Izrek. Zaporedje $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ je konvergentno.

Opomba. Njegovo limito označimo z $e := \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$.

Dokaz. $a_1 = 2$, $a_2 = (1+\frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4}$, $a_3 = (1+\frac{1}{3})^3 = \frac{64}{27}$

a_n je naraščajoče

$$a_n = (1+\tfrac{1}{n})^n = 1 + n\tfrac{1}{n} + \binom{n}{2}\tfrac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{n}\tfrac{1}{n^n}.$$

18.11 $\longrightarrow$ $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\,\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n\; n \cdots n} = \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})$

$$a_n = 1 + 1 + (1-\tfrac{1}{n})\tfrac{1}{2} + (1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})\tfrac{1}{3!} + \dots + \tfrac{1}{n!}(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})\cdots(1-\tfrac{n-1}{n})$$

$$a_{n+1} = 1 + 1 + (1-\tfrac{1}{n+1})\tfrac{1}{2} + (1-\tfrac{1}{n+1})(1-\tfrac{2}{n+1})\tfrac{1}{3!} + \dots$$

Sledi: $a_n \leq a_{n+1}$.

Za vsak n velja: $a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq$

$$\leq 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{2^3} + \dots + \tfrac{1}{2^{n-1}} \leq 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 3$$

Zato a_n konvergira. ▨

DEFINICIJA POTENCE PRI $\frac{n}{m}$ REALNEM EKSPONENTU

Definicija $a>0$, $a\in\mathbb{R}$. Naj bosta $n,m\in\mathbb{N}$. Pišemo $a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$.

Naj bo $q\in\mathbb{Q}$, $q>0$. Potem je $q=\frac{m}{n}$, kjer $m,n\in\mathbb{N}$.

Definiramo
$$a^q=a^{\frac{m}{n}},$$
$$a^0=1,$$
$$a^{-q}=\frac{1}{a^q}.$$

Opomba. Iz lastnosti n-tega korena sledi, da je definicija potence z racionalnim eksponentom smiselna.

Trditev. Za računanje s potencami, ki imajo za eksponente racionalna števila, veljajo:

$a\in\mathbb{R}, a>0, p,q\in\mathbb{Q}$:
$$a^{p+q}=a^pa^q$$
$$(a^p)^q=a^{pq}$$
$$a^pb^p=(ab)^p.$$

19.11.2018

Trditev. Naj bo $a>0$. Za vsak $\varepsilon>0$ obstaja $\delta>0$, da je
$$|a^h-1|<\varepsilon$$
za vsak $h\in\mathbb{Q}$, za katerega velja, da je $|h|<\delta$, tj. $h\in(-\delta,\delta)$.

Dokaz. $a>0$, $\varepsilon>0$. Ker je $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ obstaja n_1: za $n\geq n_1$ velja $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$.

Ker je $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}}=1$, obstaja n_2: za vsak $n\geq n_2$ velja
$$\left|\sqrt[n]{\tfrac{1}{a}}-1\right|<\varepsilon.$$

Naj bo $n\geq\max\{n_1,n_2\}$ in $\delta=\frac{1}{n}$. Izb. $h\in\mathbb{Q}$, $h\in(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$:

1) Če $h>0$: $a>1$: $0<a^h-1\underset{h<\frac{1}{n}}{<}a^{\frac{1}{n}}-1<\varepsilon$.

$a<1$: $0<1-a^h<1-a^{\frac{1}{n}}<\varepsilon$

$a^{+\frac{1}{n}}<a^h$

$h=0$ ✓

$h<0$ podobno

Trditev. Naj bo $a>0$ in naj zaporedje $r_1, r_2, \dots$ $r_j \in \mathbb{Q}$ konvergira proti $r \in \mathbb{R}$. Potem konvergira tudi $a^{r_1}, a^{r_2}, \dots$. Če je $r \in \mathbb{Q}$, potem

$$a^r = \lim_{j\to\infty} a^{r_j}.$$

Dokaz. Za primer $a>1$:

- ker je r_j konvergentno, je omejeno: obstaja M: $r_j \leq M \ \forall j$.
$$\Rightarrow a^{r_j} \leq a^M \ \forall j.$$

- a^{r_j} je Cauchyjevo

$\varepsilon>0$ $$|a^{r_n}-a^{r_m}| = |a^{r_m}||a^{r_n-r_m}-1| \leq a^M |a^{r_n-r_m}-1| < \varepsilon$$

dovolj je poiskati n_0; da za $n,m \geq n_0$ velja
$$|a^{r_n-r_m}-1| < \frac{\varepsilon}{a^M}.$$

Po prejšnji trditvi obstaja $\delta>0$, da za vse $h\in\mathbb{Q}$, $|h|<\delta$ velja $|a^h-1| < \frac{\varepsilon}{a^M}$!

Ker je r_n konv., je Cauchyjevo, zato obstaja n_0: da za $n,m \geq n_0$ velja:
$$|r_n - r_m| < \delta.$$
$\blacksquare$

Naj bo $r = \lim r_n \in \mathbb{Q}$. $|a^r - a^{r_n}| = a^r |\underbrace{a^{r-r_n}-1}_{\to 0}|$ kot prej, zato $a^{r_n} \to a^r$.

Trditev: Naj bo $a>0$ in naj imata zaporedji $\{r_n\}$ in $\{s_n\}$ racionalnih števil isto limito: $\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} s_n$.

Potem je
$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{s_n}.$$

•) Ker je r_n omejeno: $-M \le r^n \le M$

$$a^{-M} \le a^{r_n} \le a^{M} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \neq 0$$

•)

Vemo: $a^{r_n - s_n} = \frac{a^{r_n}}{a^{s_n}}$

Ker je $\lim_{n\to\infty}(r_n - s_n) = 0$, je po prejšnji trditvi $a^0 = \lim_{n\to\infty} a^{r_n - s_n}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a^{r_n}}{a^{s_n}} = 1.$$

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{r_n}}{a^{s_n}} = \frac{\lim a^{r_n}}{\lim a^{s_n}}$$

ker sta zapor. konverg., členi in limita pa od 0 različne.

$\boxed{\#}$

<u>Definicija</u>. Naj bo $a > 0$ in $r \in \mathbb{R}$. Denimo, da zaporedje $\{r_n\}$ racionalnih števil konvergira proti r.
Potem definiramo
$$a^r = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

<u>Opomba</u>. V prejšnji trditvi smo dokazali, da limita ni odvisna od izbire zaporedja.
Računska pravila, ki veljajo za računanje z racionalnimi potencami, se prenesejo na računanje z realnimi potencami.
↑ za $(a^x)^y = a^{xy}$ rabiš zveznost

Trditev. Naj bo $a>0$. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = 0$.

Dokaz. doma.

Trditev. Naj bo $\alpha \in \mathbb{R}$, $q>1$ in $q \in \mathbb{R}$. Potem velja:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{q^n} = 0.$$

Dokaz. $a_n = \frac{n^\alpha}{q^n}$.

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^\alpha}{q^{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{1}{q} \cdot \frac{n^\alpha}{q^n} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1} \cdot \frac{1}{q} a_n$$

Za racionalne potence velja, zato tudi za realne

zato je za n dovolj velik $\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{q} < 1$.

Torej: $a_{n+1} < a_n$ od nekod naprej.

a_n je od nekod naprej padajoče, navzdol je omejeno.

$L = \lim a_n$.

Velja: $L = \frac{1}{q} L \Rightarrow L = 0$. ∎

O ZAPOREDJIH KOMPLEKSNIH ŠTEVIL

Definicija. Zaporedje kompleksnih števil je preslikava $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.
Pišemo $z_n = f(n)$ in tako kot pri realnih zaporedjih rečemo zaporedje z_n.

Definicija. Zaporedje kompleksnih števil z_n konvergira proti $z \in \mathbb{C}$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq n_0$ velja:

$$|z_n - z| < \varepsilon. \qquad \text{Pišemo: } z = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

Primer. $z_n = \frac{1}{n} + i\frac{n-1}{n}$.

Trditev. Zaporedje kompleksnih števil z_n konvergira proti z natanko tedaj, kadar $\operatorname{Re} z_n$ konvergira proti $\operatorname{Re} z$ in $\operatorname{Im} z_n$ konvergira proti $\operatorname{Im} z$.

Dokaz. $(\Rightarrow)$ naj bo $z = \lim_{n\to\infty} z_n$.

Izb. $\varepsilon > 0$. Obstaja n_0: $n \geq n_0$: $|z_n - z| < \varepsilon$.

Torej $\sqrt{(\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z)^2} < \varepsilon$

Torej $\quad \geq |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z|$ in $\geq |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z|$

Sledi $\operatorname{Re} z = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n$ in $\operatorname{Im} z = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n$.

$(\Leftarrow)$ Denimo, da $\operatorname{Re} z = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n$ in $\operatorname{Im} z = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n$.

$$|z_n - z| = \sqrt{(\underbrace{\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z}_{< \varepsilon \text{ ko } n \geq n_{Re}})^2 + (\underbrace{\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z}_{< \varepsilon \text{ } n \geq n_{Im}})^2} < \sqrt{2}\,\varepsilon$$

Od tod sledi:

Trditev. Za konvergentni zaporedji kompl. števil z_n in w_n velja:

$$\lim_{n\to\infty}(z_n \pm w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n \pm \lim_{n\to\infty} w_n$$

$$\lim (z_n \cdot w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} w_n$$

Če $w_n \neq 0$ in $\lim_{n\to\infty} w_n \neq 0$: $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{\lim z_n}{\lim w_n}$

Izr. Zaporedje kompleksnih števil z_n je konvergentno natanko tedaj, kadar izpolnjuje Cauchyjev pogoj.

Dokaz. Zap. z_n je konverg. $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}\, z_n$ in $\mathrm{Im}\, z_n$ sta konv.

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}\, z_n$ in $\mathrm{Im}\, z_n$ izpolnjujeta Cauchyjev pogoj

$\Leftrightarrow$ z_n izpolnjuje Cauchyjev pogoj.