ŠTEVILSKE VRSTE

<u>Definicija</u>. Naj bo a_n realno zaporedje. Neskončno formalno vsoto $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$ imenujemo <u>številska vrsta</u>, člen a_n pa <u>splošni člen vrste</u>.

Označimo $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

<u>Primeri</u>. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$ (ali splošnejše geom. vrste)

$1+(-1)+1+(-1)+\cdots$

$2+4+6+8+\cdots$

<u>Definicija</u>. Dana je številska vrsta $a_1+a_2+\cdots$. Zaporedje

$s_1=a_1,\ s_2=a_1+a_2,\ \ldots,\ s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$

imenujemo <u>zaporedje delnih vsot</u> vrste $a_1+a_2+\cdots$.

<u>Definicija</u>. Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ številska vrsta. Če zaporedje njenih delnih vsot $s_n=a_1+\cdots+a_n$ konvergira, pravimo, da vrsta $a_1+a_2+\cdots$ <u>konvergira</u>. V tem primeru limito zaporedja delnih vsot imenujemo <u>vsota vrste</u> in pišemo $a_1+a_2+\cdots=s$.

Če zaporedje delnih vsot divergira, pravimo, da vrsta $a_1+a_2+\cdots$ divergira.

<u>Opomba</u>. Zapis $a_1+a_2+\cdots=s$ pomeni dvoje:

1) vrsta konvergira
2) njena vsota je s.

Primer. 1) Obravnavaj konvergenco geometrijske vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n, \quad a\neq 0.$$

$$s_n = a(1+q+\dots+q^{n-1}) \overset{q\neq 1}{=} a\,\frac{1-q^n}{1-q}$$

- če je $|q|<1$: $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$
- če je $q\leq -1$ ali $q>1$, s_n divergira
- če je $q=1$: $s_n = na$ divergira.

Geom. vrsta konvergira natanko tedaj, kadar je $|q|<1$.
V tem primeru je njena vsota $\frac{a}{1-q}$.

2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$s_n = 1/2 + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} =$$
$$= 1-\frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1.$$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ divergira

Trditev. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira natanko tedaj, kadar za vsak $\varepsilon>0$ obstaja $n_0\in\mathbb{N}$, da za vsak $k\in\mathbb{N}$ velja in za vsak $n\geq n_0$
$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_{n+k}|<\varepsilon.$$

Posledica. Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, potem zaporedje a_n konvergira in $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dokaz (trditve). $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverg. $\Leftrightarrow$ s_n je Cauchyjevo, tj.
$\forall\varepsilon\ \exists n_0: n,m\geq n_0\quad |s_n - s_m|\leq\varepsilon$

Trditev. Naj bo a_n zaporedje.

Če $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira $\Rightarrow$ za vsak $m \in \mathbb{N}$ $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ konvergira.

Če za nek $m \in \mathbb{N}$ $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ konvergira $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ imenujemo ostanek vrste.

Dokaz. po definiciji.

Trditev. Če $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, potem za vsak $c \in \mathbb{R}$ vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ konv. in $\sum c a_n = c \sum a_n$

Če konverg. tudi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, potem konvergirata tudi $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ in $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ in velja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Opomba. Konv. vrste sestavljajo vektorski prostor nad $\mathbb{R}$.

Dokaz. Sledi iz pravil za računanje s konvergentnimi zaporedji: ker s_n konverg., konv. tudi $c s_n$

VRSTE Z NENEGATIVNIMI ČLENI

Naj bo a_n zaporedje nenegativnih števil. Tedaj pravimo, da je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta z nenegativnimi členi.

Naj bo s_n njeno zaporedje delnih vsot.

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$$

Zaporedje s_n je naraščajoče. Zato velja:

Trditev. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ z nenegativnimi členi konvergira natanko tedaj, ko je zaporedje njenih delnih vsot navzgor omejeno.

Primer. Harmonična vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$h_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

n-to harmonično število $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ je n-krat obratna vrednost harmonične sredine prvih n naravnih števil.

velja: $\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{2m} \geq m \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}$.

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{m=2} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ 2^3}}{s_8} = 1 + \cdots + \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}}_{\substack{\vee\!/ \\ \frac{1}{2}}} \geq 2 + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2}(k-2)$$

$$s_{2^k} \geq 2 + \frac{1}{2}(k-2) \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty$$

Trditev (primerjalni kriterij za konvergenco vrst).
Naj bosta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vrsti z nenegativnimi členi in naj velja

$$a_n \leq b_n \text{ za vsak } n \in \mathbb{N}.$$

(1) Če $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, potem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

(2) Če $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, potem $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira.

Pravimo, da je vrsta $\sum b_n$ majoranta za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dokaz. $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ delna vsota $\sum a_n$,
$t_n = b_1 + \cdots + b_n$ delna vsota $\sum b_n$.
Iz predpostavke sledi: $s_n \leq t_n \ \forall n$.

(1) Če $\sum b_n$ konverg., potem je $\overset{\text{zap.}}{(}t_n)$ navzgor omejeno: $t_n \leq M \ \forall n$.
Torej je s_n navzgor omejeno (in narašč.), torej konvergira.

(2) Če $\sum a_n$ divergira, je s_n navzgor neomejeno, zato je tudi t_n neomejeno $\boxed{\square}$

Primer. 1) Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergira $\Longleftrightarrow p>1$.

- če je $p\leq 1$: $\frac{1}{n^p}\geq \frac{1}{n}$. Ker $\sum \frac{1}{n}$ divergira, po primerjalnem kriteriju $\sum \frac{1}{n^p}$ divergira.

- če je $p>1$:
ideja je podobna kot pri harmonični vrsti (samo, da ocenjujemo v drugo smer):

$$\frac{1}{(m+1)^p}+\dots+\frac{1}{(m+m)^p}\leq m\cdot\frac{1}{m^p}=\frac{1}{m^{p-1}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}}_{\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}}+\underbrace{\frac{1}{5^p}+\dots+\frac{1}{8^p}}_{\leq \left(\frac{1}{4}\right)^{p-1}=\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2}+\underbrace{\frac{1}{9^p}+\dots+\frac{1}{16^p}}_{\leq \left(\frac{1}{8}\right)^{p-1}=\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3}$$

$$s_{2^k}\leq 1+\frac{1}{2^p}+\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2+\dots+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{k-1}=\frac{1}{2^p}+\frac{1-\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k}{1-\frac{1}{2^{p-1}}}\leq\frac{1}{2^p}+\frac{1}{1-\frac{1}{2^{p-1}}}$$

Torej so s_{2^k} omejene, torej je zapor. s_n omejeno.
Zato vrsta konvergira. $\blacksquare$

Opomba. Ugotovili smo, da konvergira, nič pa nismo povedali o tem, kam konvergira, tj. koliko je njena vsota.

$$\underset{\mathbb{C}}{\overset{\cap}{z}}\longmapsto\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$$ konvergira za $\operatorname{Re} z>1$.
Vsota se imenuje Riemannova ζ funkcija.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ $\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{n^2}$ majoranta je konvergentna vrsta, zato $\sum\frac{1}{n^2+1}$ konvergira.

Izrek. (kvocientni ali d'Alembertov kriterij)
Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s **pozitivnimi** členi. Sestavimo zaporedje $d_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Velja: 1) Če obstaja $q<1$, da velja $d_n \leq q$ za $\forall n$, potem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. Opomba $\left(\limsup_{n\to\infty} d_n < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.}\right)$

2) Če velja $d_n \geq 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, potem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Če obstaja $\lim_{n\to\infty} d_n = d$, potem

1)' če je $d<1$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira

2)' če je $d>1$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Dokaz. 1) $d_n \leq q \ \forall n$

$$a_{n+1} \leq a_n q \leq a_{n-1} q^2 \leq \cdots \leq a_1 q^n$$

Torej je vrsta $a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^n + \cdots$ majoranta za $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, zato $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

2) Če je $d_n \geq 1$, je $a_{n+1} \geq a_n$. Zaporedje a_n je naraščajoče zaporedje pozitivnih števil. Tako ne more konverg. proti 0. Zato $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

1') Če je $\lim_{n\to\infty} d_n < 1$, potem $\exists q<1$ in $\exists n_0$ $d_n \leq q < 1 \ \forall n \geq n_0$. Po 1) $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konv. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv.

Primer. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ $\quad d_n = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ Zato $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ konv.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$, $x>0$

$$d_n = \frac{(n+1)x^{n+1}}{n x^n} = \frac{n+1}{n} x$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = x$$

$x>1$ divergira

$x<1$ konvergira

$x=1$: $\sum_{n=1}^{\infty} n$ divergira.

Izrek (korenski ali Cauchyjev kriterij).

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta z nenegativnimi členi. Sestavimo zaporedje

$$c_n = \sqrt[n]{a_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tedaj velja:

1) Če obstaja tak $q<1$, da je $c_n \leq q$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, potem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. (Opomba: $\limsup_{n\to\infty} c_n < 1$)

2) Če velja $c_n \geq 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, potem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Če obstaja $c = \lim_{n\to\infty} c_n$, potem

1) Če je $c<1$, potem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

2) Če je $c>1$, potem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Dokaz. 1) naj bo $c_n \leq q \ \forall n$.

$a_n \leq q^n \ \forall n$ $\qquad$ $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ je majoranta za $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $0<q<1$

zato $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

2) $c_n \geq 1 \ \forall n$

$a_n \geq 1 \ \forall n$: členi ne konvergirajo proti 0, zato $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Primer. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n, \ x>0.$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{x}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0.$ $\qquad$ Konvergira za vsak $x>0$.

$\sum \frac{1}{n^s}$ ni oba kriterija

Izrek. (Raabejev kriterij) Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s pozitivnimi členi.

Sestavimo zaporedje $r_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

1) Če obstaja $r > 1$, da je $r_n \geq r$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, potem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

2) Če velja $r_n \leq 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Če obstaja $r = \lim_{n\to\infty} r_n$, potem velja

1) Če je $r > 1$, potem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira,

2) Če je $r < 1$, potem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Dokaz. Primerjamo z $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$:

$$r_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq r$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \geq \frac{r}{n}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \frac{r}{n}$$

Trditev. Če je $s \in \mathbb{Q}$, $1 < s < r$, potem $1 + \frac{r}{n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s$ za vsak dovolj velik n.

Dokaz. $s = \frac{p}{q}$: $\quad 1 + \frac{r}{n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{p}{q}} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{r}{n}\right)^q > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n\left(\left(1 + \frac{r}{n}\right)^q - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p\right) > 0$$

$$\parallel$$

$$rq - p + \frac{1}{n}(\cdots) \xrightarrow[n\to\infty]{} rq - p > 0 \quad \blacksquare$$

Torej: $\quad \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \frac{r}{n} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s$ za $n \geq n_0$.

$$a_{n+1} \leq \frac{n^s}{(n+1)^s} a_n$$

$$a_{n+2} \leq \frac{(n+1)^s}{(n+2)^s} \cdot \frac{n^s}{(n+1)^s} a_n = \frac{n^s}{(n+2)^s} a_n$$

$$a_{n_0+k} \leq \frac{n_0^s}{(n_0+k)^s} a_{n_0} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k} \text{ je major. } a_{n_0} n_0^s \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n_0+k)^s} < \infty$$

2) Če je $r_n \le 1$

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \le 1$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \le 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$$

$$a_{n+1} \ge \frac{n}{n+1} a_n$$

$$a_{n+k} \ge \frac{a_n n}{n+k} \qquad n=1: \quad a_{k+1} \ge a_1 \cdot \frac{1}{k+1}$$

Vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ je majoranta za $a_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ div. harm. vrsta ■

Primer. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ $\quad x>0$.

Kvocientni: $d_n = \frac{n+1}{(x+n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$$r_n = n\left(\frac{x+n+1}{n+1} - 1\right) = \frac{nx}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

$x > 1$ konvergira

$x < 1$ divergira

$x = 1$: $\sum \frac{n!}{(n+1)!} = \sum \frac{1}{n}$ divergira.

ABSOLUTNA KONVERGENCA

Definicija. Dana je številska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Pravimo, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna, kadar je $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentna.

Izrek. Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna, potem je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna.

Dokaz. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira $\overset{C.\ pogoj}{\Rightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \ \big||a_{n+1}| + \dots + |a_{n+k}|\big| < \varepsilon$ za $\forall n \ge n_0\ \forall k \in \mathbb{N}$

$\therefore\ |a_{n+1} + \dots + a_{n+k}| \le |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+k}| < \varepsilon$ (C. pogoj

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergira.}$$ ■

Primer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$.

Izr. (Leibnizov kriterij za alternirajoče vrste).

Naj bo a_n padajoče zaporedje z limito 0.
pozitivnih števil

Tedaj vsota $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergira.

Velja ocena $\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n - \sum_{n=1}^{m} (-1)^n a_n \right| \leq a_{m+1}$

Dokaz. $s_m = \sum_{n=1}^{m} (-1)^n a_n$ m-ta delna vsota.

$s_{2n} = (\underset{\geq 0}{-a_1 + a_2}) + (\underset{\geq 0}{-a_3 + a_4}) + \dots + (\underset{\geq 0}{-a_{2n-1} + a_{2n}}) \leq s_{2n-2}$ s_{2n} je padajoče

$s_{2n} = -a_1 + \underset{\geq 0}{(a_2 - a_3)} + \dots + \underset{\geq 0}{(a_{2n-2} - a_{2n-1})} + \underset{\geq 0}{a_{2n}} \geq -a_1$ s_{2n} je navzdol om.

Torej je s_{2n} konvergentno.

$s_{2n+1} \geq s_{2n-1}$

$s_{2n+1} = -a_1 + (a_2 - a_3) + \dots + (a_{2n} - a_{2n+1}) \Rightarrow$ je naraščajoče

$= (\underset{\geq 0}{-a_1 + a_2}) + \dots + (\underset{\geq 0}{-a_{2n-1} + a_{2n}}) - a_{2n+1} \leq -a_{2n+1}$ navzgor omejeno

ker je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, je $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$,

s_n konvergira.

$|s - s_m|$

$|s_{2n+m+1} - s_m| = |(-1)^{m+1} a_{m+1} + \dots + (-1)^{n+m} a_{2n+m+1}| =$

$= |a_{m+1} - (a_{m+2} - a_{m+3}) - \dots - (a_{2n+m} - a_{2n+m})| \leq |a_{m+1}|$ NATANČNO

$\Rightarrow |s - s_m| \leq |a_{m+1}| = a_{m+1}$ $\blacksquare$

Primer. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konvergira in ne konvergira absolutno.

Definicija. Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ številska vrsta. Če je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna, nipa absolutno konvergentna, pravimo, da je <u>pogojno konvergentna</u>.

O PREUREDITVAH VRST

Dana je številska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in bijekcija $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
Vrsto $a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ imenujemo <u>preureditev vrste</u>.

<u>Izrek</u>. Naj bo vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna in naj bo $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektivna preslikava. Potem je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ konvergentna in velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}.$$

<u>Dokaz</u>. Naj bo $s_n = a_1 + \dots + a_n$ in $s = \lim_{n\to\infty} s_n$.

$$\left|\sum_{n=1}^{M} a_{\pi(n)} - s\right| = \left|\sum_{n=1}^{N_0} a_n + \sum_{\substack{n=1 \\ \pi(n) > N_0}}^{M} a_{\pi(n)} - s\right| \le$$

$$\le \left|\sum_{n=1}^{N_0} a_n - s\right| + \sum_{\substack{n=1 \\ \pi(n) > N_0}}^{M} |a_{\pi(n)}| \le$$

$$\le \left|\sum_{n=1}^{N_0} a_n - s\right| + \sum_{n=N_0+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$$

Ker je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ abs. konvergentna, obstaja N_0:

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n - s\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{za } N \geq N_0$$

$$\left|\sum_{n=1}^{N} |a_n| - S\right| = \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{za } N \geq N_0$$

Ker je π bijekcija, obstaja M_0: $\{1,2,\dots,N_0\} \subset \pi(\{1,2,\dots,M_0\})$.
Torej za vsak $M \geq M_0$ velja

Izrek. (Riemann) Naj bo vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pogojno konvergentna.

Potem za vsako število $A \in \mathbb{R}$ obstaja bijekcija $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

da je $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = A$, še več obstajata tudi permutaciji π_1 in π_2 $\ni$:

$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} a_{\pi_1(n)} = \infty$ in $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} a_{\pi_2(n)} = -\infty$.

Dokaz. Predpostaviti smemo, da $a_j \neq 0$ $\forall j$.

$S_n = a_1 + \dots + a_n = P_{k(n)} - Q_{m(n)}$ pri čemer so $P_{k(n)}$ vsi pozitivni členi med $a_1, \dots, a_n$, $Q_{m(n)}$ pa vsi negativni ($-a_i$).

$$P_{k(n)} = p_1 + \dots + p_k$$
$$Q_{m(n)} = q_1 + \dots + q_m \qquad k + m = n.$$

$s_n' = P_k + Q_m$ ... delne vsote $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Trditev. $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ divergirata, tj. $P_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$ in $Q_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \infty$).

Dokaz. Če bi obe konvergirali, potem bi iz $s_n' = P_k + Q_m$ sledilo, da $\sum a_n$ konvergira absolutno.

Če bi ena konvergirala, druga pa ne;

$$S_n = P_k - Q_m$$

Potem $\sum a_n$ ne bi konvergirala.

Trditev. $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} q_n = 0$, ker je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverg.

Naj bo $A \in \mathbb{R}$. Vzamemo najprej $p_1, \dots, p_{k_1}$, kjer je k_1 najmanjši tak, da je
$$p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} > A.$$
sedaj vzamemo najmanjši tak m_1, da je
$$p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \dots - q_{m_1} < A.$$
Postopek nadaljujemo. Ker $p_j \to 0$ in $q_j \to 0$, delne vsote konvergirajo proti A.

Za $A = \infty$: $p_1 + \dots + p_{k_1} > 1$ najm. k_2: $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} - q_1 + p_{k_1+1} + \dots + p_{k_2} > 2$

etc

MNOŽENJE VRST

Naj bosta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ številski vrsti.

	a_1	a_2	$\dots$	a_n	$\dots$
b_1	$a_1 b_1$	$a_2 b_1$		$a_n b_1$	$\dots$
b_2	$a_1 b_2$	$a_2 b_2$		$a_n b_2$	$\dots$
b_3	$- -$			$- -$	
$\vdots$					

Vrsta iz vseh produktov je oblike $\sum_{s=1}^{\infty} a_{i_s} b_{k_s}$

Primer $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$

Cauchyjev produkt $\sum c_n = (\sum a_n)(\sum b_n)$

Produkte lahko na različne načine razvrstimo v zaporedje ~ v vrsto.
$f = (f_1, f_2): \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bijekcija: $\sum_{s=1}^{\infty} a_{f_1(s)} b_{f_2(s)}$

Trditev. Naj bosta vrsti $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolutno konvergentni.
Potem je vrsta sestavljena iz vseh produktov abs konvergentna in njena vsota je $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$.

Dokaz. Naj bo $\sum_{s=1}^{\infty} a_{i_s} b_{k_s}$ neka vrstni red vrste iz produktov.

Delna vsota $\sum_{s=1} |a_{i_s} b_{k_s}|$:

$$s_s = |a_{i_1} b_{k_1}| + |a_{i_2} b_{k_2}| + \dots + |a_{i_s} b_{k_s}|$$

Naj bo N največji od indeksov $i_1, i_2, \dots, i_s, k_1, k_2, \dots, k_s$.
Potem je

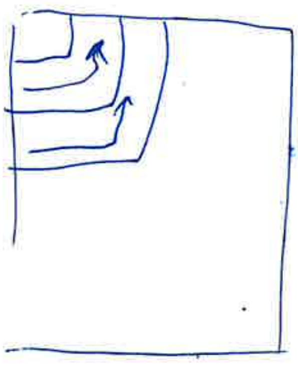
$$s_s \le (|a_1| + |a_2| + \dots + |a_N|)(|b_1| + |b_2| + \dots + |b_N|) \le A_N \cdot B_N \le AB$$

kjer sta A_N, B_N delni vsoti $\sum |a_n|, \sum |b_n|$.

Torej je zapor. delnih vsot omejeno, zato vrsta (z nenegat. členi) konvergira.

Zato produkt abs. konv. Vemo, da je v tem primeru vsota neodvisna od vrstnega reda členov.

Vzemimo sedaj vrstni red:



ker vrsta $a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_1 b_3 + a_2 b_3 + a_3 b_3 + \dots$ konv.
konvergira tudi $a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_1 b_3) + \dots$
katere delne vsote so $a_1 b_1, (a_1 + a_2)(b_1 + b_2), \dots$
in to konvergira proti $(\sum a_n)(\sum b_n)$

VB

Primer. $a_n = b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$\sum a_n$ konvergira po Leibnizovom kriteriju.

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 =$$

$$= (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(j+1)(n-j+1)}}$$

$$|c_n| = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(j+1)(n+1-j)}} \geq \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+1)}} = 1$$

ne konvergira

DVAKRATNE VRSTE

Dana je neskončna matrika $[a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \end{bmatrix}$

Formalni vsoti $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right)$ in $\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\right)$ imenujemo dvakratni vrsti. $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right)$ konvergira, če za $\forall i$ $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$ konvergira in konvergira $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right)$. Podobno za drugo.

Elemente $[a_{ij}]$ lahko s poljubno bijekcijo $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ uredimo v zaporedje: $a_{f(1)}, a_{f(2)}, \ldots$ in sestavimo vrsto

$$(*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}.$$

Velja: 1) Če $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ absolutno konvergira, potem dvakratni vrsti konvergirata in vse tri imajo enako vsoto.

2) Če dvakratna vrsta konvergira, ko člene nadomestimo z abs. vrednostmi, potem $(*)$ abs. konvergira. (in vsote so enake).