FUNKCIJE REALNE SPREMENLJIVKE 13.12.

Definicija. Naj bo $D \subset \mathbb{R}$. Realna funkcija realne spremenljivke je preslikava $f: D \to \mathbb{R}$.
D imenujemo definicijsko območje ali domena.

Opomba. 1) V funkciji sta združena dva podatka: domena in predpis.
2) Funkciji f in g sta enaki, če imata enako domeno in enak predpis.

Dogovor. Funkcijo f lahko podamo tudi samo s predpisom. V tem primeru vzamemo za definicijsko območje množico vseh x, za katere ima predpis smisel.

Primer. 1) $f(x) = \sqrt{x}$
Za defin. območje vzamemo $[0, \infty)$.
2) Ali predpisa $f(x) = \ln(x-1) + \ln(x+1)$ in
$g(x) = \ln(x^2-1)$ določata isto funkcijo?

$$D_f = (1, \infty), \quad D_g = (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

$$f(x) = g(x) \text{ za } x \in D_f \cap D_g.$$

Ne $f \neq g$ ker $D_f \neq D_g$.

Definicija. Naj bosta f in g funkciji. Če je $D_f \subset D_g$ in velja $f(x) = g(x)$ za $\forall x \in D_f$, potem rečemo, da je g razširitev funkcije f in da je f zožitev funkcije g.

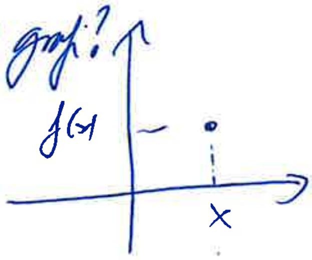
Primer zgoraj 2.

Definicija. Naj bo $D \subset \mathbb{R}$ in $f: D \to \mathbb{R}$ funkcija. Množica $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in D\} \subset \mathbb{R}^2$ se imenuje graf funkcije.

Opomba. 1) Funkcija f je s svojim grafom natanko določena.

2) Katere podmnožice $S \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ so grafi?

Tiste, za katere je presek S z vsako navpično premico kvečjemu ena točka.



$\pi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$\pi(x,y) = x.$
$\pi(\Gamma_f) = D.$

OPERACIJE S FUNKCIJAMI

Sestavljanje ali kompozitum funkcij:

$$f: D_f \to \mathbb{R}, \quad g: D_g \to \mathbb{R}.$$

Če je $Z_f \subset D_g$, potem lahko definiramo

$$(g\circ f): D_f \to \mathbb{R} \text{ s predpisom}$$

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)).$$

Primer. $f(x) = x^2+1$
$g(x) = \log x^2$

$D_f = \mathbb{R}, \quad D_g = \mathbb{R}\setminus\{0\}.$

$Z_f = [1,\infty)$

$(g\circ f)(x) = \log(x^2+1)^2 \qquad D_{g\circ f} = \mathbb{R}$

$(f\circ g)(x) = (\log x^2)^2 + 1 \qquad D_{f\circ g} = \mathbb{R}\setminus\{0\}.$

Definicija. Naj bo $f: D \to \mathbb{R}$ injektivna funkcija z zalogo vrednosti Z_f. Inverzno preslikavo $f^{-1}: Z_f \to \mathbb{R}$ imenujemo inverzna funkcija funkcije f.

Opomba. Če je $f: A \to B$ bijektivna preslikava, potem je inv. preslikava $f^{-1}: B \to A$ defin. s predpisom

$$f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b.$$

Primer. $f(x) = \dfrac{2x+3}{3x-1}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$.

Določi f^{-1}, če obstaja.

$$y = \frac{2x+3}{3x-1} \iff y(3x-1) = 2x+3 \iff$$

$$3xy - 2x = 3 + 2y$$

$$x = \frac{2y+3}{3y-2}$$

Torej: za vsak $y \neq \frac{2}{3}$ je $\frac{2y+3}{3y-2}$ tisti x, za katerega velja

$f(x) = y$ in x je en sam.

Torej: f je injektivna in $Z_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$.

$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{2x+3}{3x-2}.$$

Opomba. Naj bo $f : D_f \to \mathbb{R}$ injektivna funkcija.

Ker je $f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$ za $y \in Z_f$ velja:

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)); x \in D_f\} = \{(f^{-1}(y), y); y \in Z_f\}$$

$$\Gamma_{f^{-1}} = \{(y, f^{-1}(y)); y \in D_{f^{-1}} = Z_f\}.$$

Zato je graf f^{-1} zrcalna slika Γ_f glede na simetralo lihih kvadrantov.

Definicija. Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija.

Pravimo, da je f navzgor omejena, če je Z_f navzgor omejena, tj. če obstaja $M \in \mathbb{R}$: $f(x) \leq M$ za $\forall x \in D$.

Funkcija f je navzdol omejena, če je Z_f navzdol omejena.

Funkcija f je omejena, če je f navzgor in navzdol omejena.

V tem primeru sup f je natančna zg. meja Z_f in označimo s $\sup f$. Max f je najv. vrednost f

Definicija. Naj bo $f: D \to \mathbb{R}$ funkcija. Pravimo, da je $x \in D$ <u>ničla funkcije f</u>, če je $f(x) = 0$.

Definicija. Naj bosta f in $g: D \to \mathbb{R}$ funkciji. Funkcije $f+g, f-g, f \cdot g: D \to \mathbb{R}$ definiramo s predpisi:

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\
(f-g)(x) &= f(x) - g(x) \qquad \text{za } x \in D. \\
(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x).
\end{aligned}
$$

Če je $g(x) \neq 0$ za vsak $x \in D$, lahko defin. $\frac{f}{g}: D \to \mathbb{R}$ s predpisom
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad x \in D.$$

Definicija. Naj bosta $f, g: D \to \mathbb{R}$ funkciji. Definiramo s predpisoma funkciji $\max\{f,g\}, \min\{f,g\}: D \to \mathbb{R}$
$$\max\{f,g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \ x \in D$$
$$\min\{f,g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\}, \ x \in D.$$

Definicija. Naj bo Γ množica in $f_\gamma: D \to \mathbb{R}$ funkcija za vsak $\gamma \in \Gamma$. Če je za vsak $x \in D$ množica $\{f_\gamma(x); \gamma \in \Gamma\}$ navzgor omejena, potem lahko definiramo funkcijo
$$\sup_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma : D \to \mathbb{R} \text{ s predpisom}$$
$$\left(\sup_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma\right)(x) = \sup_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma(x), \quad x \in D.$$

Primer. $f_\gamma(x) = \frac{1}{1+\gamma x^2}$, $\gamma \in (0, \infty)$.
$$\sup_\Gamma f_\gamma(x) = 1 \text{ za } \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\inf_\Gamma f_\gamma(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

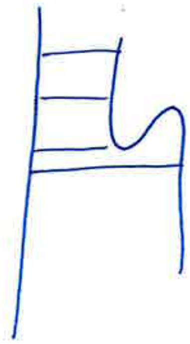
ZVEZNOST

Primeri nezveznih funkcij:

1) $f(x) = \begin{cases} 0, & x<2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$

2) $g(x) = \begin{cases} 1/x, & x<0 \\ 2+x, & x \geq 0 \end{cases}$

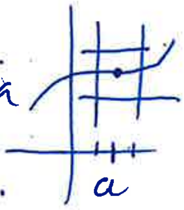
3) oddaljenost projekcije od originala pri projekciji na neravni zaslon



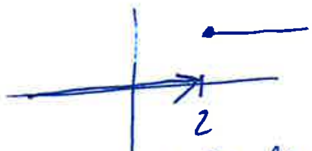
Nezvezne funkcije so take, pri katerih „majhna" sprememba neodvisne spremenljivke povzroči „veliko" spremembo funkcijske vrednosti.

Funkcija $f: D \to \mathbb{R}$ je zvezna v točki $a \in D$, če je za x blizu a, $f(x)$ blizu $f(a)$. Natančneje:

Definicija. Naj bo $D \subset \mathbb{R}$ in $f: D \to \mathbb{R}$ funkcija, $a \in D$. Funkcija f je zvezna v točki $a \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vse $x \in D$, $|x-a| < \delta$, velja $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.



Primer 1) $f(x) = \begin{cases} 0, & x<2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$ ni zvezna v točki 2.



$\varepsilon = \frac{1}{2}$. $f(2) = 1$

Na vsakem intervalu $(2-\delta, 2+\delta)$ lahko izberemo $x_\delta = 2 - \frac{\delta}{2}$: $f(x_\delta) = 0$

$|f(2) - f(x_\delta)| = 1 > \varepsilon$.

2) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

3) $g(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$

Def. Naj bo $\varepsilon, \delta > 0$, $D \subset \mathbb{R}$, $a \in D$. δ okolica t. a v D je $(a-\delta, a+\delta) \cap D$.

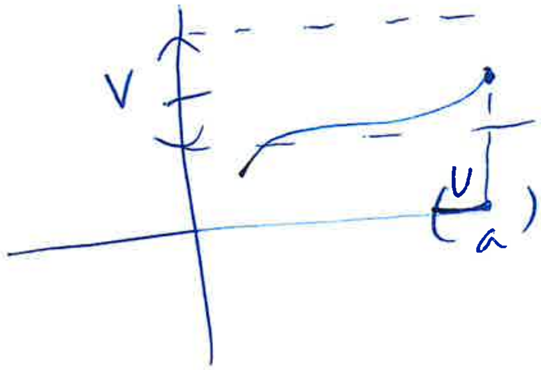
Ekvivalentna definicija:

Naj bo $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ funkcija in $a \in D$. Funkcija f je zvezna v točki a, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da f preslika δ okolico točke a v ε okolico točke $f(a)$.

Definicija. Naj bo $a \in D \subset \mathbb{R}$. Pravimo, da je U okolica točke a v D, če obstaja kakšna δ okolica točke a v D, ki leži v U.

Ekvivalentna definicija zveznosti.

Naj bo $D \subset \mathbb{R}$, $a \in D$ in $f: D \to \mathbb{R}$ funkcija.
Funkcija f je zvezna v točki a, če za vsako okolico $f(a)$ obstaja okolica U od a v D, da je $f(U) \subset V$.



Opis zveznosti z zaporedji:

Naj bo $D \subset \mathbb{R}$, $a \in D$ in $f: D \to \mathbb{R}$ zvezna v a funkcija.
Naj bo x_n konvergentno zaporedje z limito a, $x_n \in D$ $\forall n$.
Tedaj zap. $f(x_n)$ konvergira proti $f(a)$.

Dokaz. izb. $\varepsilon > 0$. Ker je f zvezna v točki a, obstaja $\delta > 0$: če $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap D$, potem

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Ker je x_n konvergentno, obstaja n_0: če je $n \geq n_0$, potem je $|x_n - a| < \delta$.
Torej velja $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ za vsak $n \geq n_0$. ▨

Velja tudi obratno:

Izrek. Naj bo $D \subset \mathbb{R}$, $a \in D$ in $f: D \to \mathbb{R}$ funkcija. Funkcija f je zvezna v točki $a \in D$ natanko tedaj, kadar za vsako zaporedje $x_n \in D$, ki konvergira proti a, zaporedje $f(x_n)$ konvergira proti $f(a)$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) že vemo

Primer. 1) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ Dirichletova funkcija

f je nezvezna v vsaki točki $x \in \mathbb{R}$.

2) $f : (0,1) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & x = \frac{m}{k}, \text{ kjer je } \frac{m}{k} \text{ okrajšan ulomek} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

f je zvezna v vseh $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in nezvezna v vseh $x \in \mathbb{Q}$

(VAJE)

($\Leftarrow$) Denimo, da f ni zvezna v točki a:
obstaja nek $\varepsilon > 0$, da so poljubno blizu a točke $x \in D$,
za katere velja $|f(a) - f(x)| \geq \varepsilon$, tj.
za vsak $\delta > 0$ obstaja $x \in D$, $|a - x| < \delta$ in $|f(a) - f(x)| \geq \varepsilon$.
torej za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja $x_n \in D$, $|x_n - a| < \frac{1}{n}$
in $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$.

To pomeni, da zap. x_n konvergira proti a, $f(x_n)$ pa ne
konvergira proti $f(a)$ $\rightarrow\!\!\!\!\times$.

<u>Izrek</u>. Najbo $D \subset \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ funkciji, ki sta zvezni v točki $a \in D$.
Potem so funkcije $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ zvezne v točki a.
Če je $g(a) \neq 0$, potem je $\frac{f}{g}$ zvezna v točki a.

<u>Dokaz</u>. Ker sta f in g zvezni v ti. a, za vsako zaporedje
$x_n \in D$, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ velja $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ in
$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(a)$.

Potem pa iz lastnosti, ki veljajo za računanje s
konverg. zaporedji sledi:

$$\lim_{n\to\infty} (f+g)(x_n) = \lim_{n\to\infty} (f(x_n) + g(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) = f(a) + g(a) = (f+g)(a).$$

Podobno za $f-g$ in $f \cdot g$.
Denimo, da je $g(a) \neq 0$. Tedaj zaradi zveznosti obstaja $\delta > 0$,
da je $g(x) \neq 0$ za $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap D$. Če je torej $x_n \in D$ konverg.
zapor. z limito a, velja $g(x_n) \neq 0$ za vse n od nekod naprej in
$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(a) \neq 0$. Po izreku o limiti kvocienta velja:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim f(x_n)}{\lim g(x_n)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \left(\frac{f}{g}\right)(a)$$

Izrek. Naj bosta f in g taki funkciji, da je $Z_f \subset D_g$. Če je f zvezna v točki $a \in D_f$ in g zvezna v točki $f(a)$, potem je $g \circ f$ zvezna v točki a.

Dokaz. Naj bo $x_n \in D_f$ zaporedje, ki konvergira proti a. Ker je f zvezna v točki a, je $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Torej je $f(x_n) \in D_g$ konvergentno zaporedje, ki konverg. proti $f(a) \in D_g$. Ker je g zvezna v $f(a)$, je

$$\lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(a)).$$

Torej velja: $\lim_{n\to\infty} (g\circ f)(x_n) = (g\circ f)(a)$ za vsako zaporedje x_n, ki konvergira proti a.

Torej je $g\circ f$ zvezna v a. ∎

Definicija. Naj bo f funkcija. Če je f zvezna v vsaki točki $a \in D_f$, potem pravimo, da je <u>f zvezna funkcija</u>.

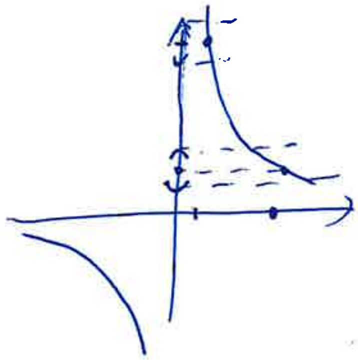
Primeri. 1) $f(x) = c$ Konstanta je zvezna funkcija.

2) $f(x) = x$ Identiteta je zvezna funkcija.

Odtod sledi, da so polinomi in racionalne funkcije zvezne.

ENAKOMERNA ZVEZNOST

Primer. $f(x)=\frac{1}{x}$



f je zvezna na $(0,\infty)$.

Torej za vsak $a\in(0,\infty)$ in vsak $\varepsilon>0$ obstaja $\delta_a>0$:
za vsak $x\in(a-\delta_a, a+\delta_a)\cap(0,\infty)$ velja $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

Ne obstaja pa δ, ki bi bil „dober" za vse a, tj. da bi veljalo: če je $|x-a|<\delta$ in $a,x\in(0,\infty)$, potem $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

Če bi tak $\delta>0$ obstajal, lahko BZŠ privzamemo, da je $\delta<\frac{1}{2}$. Naj bo sedaj $0<a<\delta$ in $x=2a$.
Tedaj je $x\in(0,\infty)\cap(a-\delta,a+\delta)$.

$$|f(x)-f(a)|=\left|\frac{1}{2a}-\frac{1}{a}\right|=\frac{1}{2a}$$ kar je pri dovolj majhnih a poljubno veliko.

Torej pri danem $\varepsilon>0$ ne obstaja $\delta>0$, ki bi bil ustrezen za vse a.
↑ npr. pri $\varepsilon=1$

Definicija. Naj bo $f: D\to\mathbb{R}$ funkcija. Pravimo, da je f enakomerno zvezna na D, če za vsak $\varepsilon>0$ obstaja $\delta>0$, da za vsak $x_1,x_2\in D$, $|x_1-x_2|<\delta$, velja $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

Opomba
1) Isti δ je dober za vse x.
2) Če je f enakomerno zvezna na D, potem je f zvezna na D.
3) $f(x)=\frac{1}{x}$ je zvezna na $(0,\infty)$ in ni enakomerno zvezna na $(0,\infty)$.

Izrek. Naj bo funkcija f definirana na $[a,b]$.
Če je f zvezna, potem je f enakomerno zvezna.

Opomba. Zvezna funkcija na zaprtem intervalu je enakom. zvezna.

Lema o pokritju. Dan je zaprt interval $[a,b]$ in za vsak $x \in [a,b]$ naj $\delta(x) > 0$. Označimo z $O_x = (x-\delta(x), x+\delta(x))$ $\delta(x)$-okolico točke x. Tedaj v družini okolic $\{O_x; x \in [a,b]\}$ obstaja končno število okolic, ki pokrijejo $[a,b]$, tj:
obstaja $n \in \mathbb{N}$ in $x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$, da je
$$[a,b] \subset O_{x_1} \cup O_{x_2} \cup \ldots \cup O_{x_n}.$$

Dokaz. O_a pokrije vsak interval $[a,c]$, kjer je $c < a+\delta(a)$.
$S := \{c \in [a,b];$ interval $[a,c]$ je mogoče pokriti s končno okolicami iz družine okolic $\{O_x\}\}$

- $S \neq \emptyset$, ker so točke med a in $a+\delta(a)$ v S.
- $S \subset [a,b]$, zato je S navzgor omejena.
- $M := \sup S \in [a,b]$.
- $M \in S$: $M-\delta(M) < M$, zato obstaja $c \in S$: $c > M-\delta(M)$. Potem je $[a,c]$ možno pokriti s končno mnogo članicami družine O_x. Če tem dodamo še $(M-\delta(M), M+\delta(M))$, dobimo končno pokritje $[a,M]$. Torej $M \in S$.
- $M = b$: Okolice $O_{x_1}, \ldots O_{x_m}$ pokrijejo $[a,M]$. $O_{x_1}, \ldots, O_{x_m}, O_M$ pokrijejo $[a,c]$ za vsak $c \in [M, M+\delta(M)) \cap [a,b]$.
Torej je $M = b$ (sicer je $[a,c] \supsetneq [a,M]$ $\not\to$ ker je M supremum)

<u>Dokaz izreka.</u> Dokažimo, da je f zvezna na $[a,b]$.

Izberimo poljubni $\varepsilon > 0$. Za vsak $x \in [a,b]$ obstaja $\delta(x)$:

če je $x' \in (x - 2\delta(x), x + 2\delta(x)) \cap [a,b]$, potem $|f(x) - f(x')| < \varepsilon/2$.

$O_x := (x - \delta(x), x + \delta(x))$.

Po lemi o pokritjih obstaja $m \in \mathbb{N}$ in $x_1, \dots, x_m \in [a,b]$, da:

$$[a,b] \subset O_{x_1} \cup \dots \cup O_{x_m}. \qquad (*)$$

Naj bo $\delta := \min\{\delta(x_1), \dots, \delta(x_m)\}$.

Če $x, x' \in [a,b]$, $|x - x'| < \delta$, potem po $(*)$ obstaja j:

$$x \in O_{x_j}.$$

$$|x' - x_j| = |x' - x + x - x_j| \leq |x' - x| + |x - x_j| \leq \delta + \delta(x_j) \leq 2\delta(x_j)$$

$$|f(x) - f(x')| = |f(x) - f(x_j) + f(x_j) - f(x')| \leq$$

$$\leq \underbrace{|f(x) - f(x_j)|}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{|f(x_j) - f(x')|}_{|x - x_j| < \delta < \delta(x_j)} \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2.$$

$\blacksquare$

<u>Posledica</u> (leme o pokritjih) Naj bo $K = [a,b]$ zaprt interval.

Iz vsakega pokritja K z odprtimi intervali je mogoče izbrati končno podpokritje. Tj., če $\{I_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ družina takih odprtih intervalov I_γ, da velja

$$K \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma,$$

Potem obstaja $m \in \mathbb{N}$, $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \Gamma$, da velja

$$K \subset I_{\gamma_1} \cup I_{\gamma_2} \cup \dots \cup I_{\gamma_m}.$$

<u>Dokaz.</u> Za vsak $x \in K$ obstaja $\gamma(x)$: $x \in I_{\gamma(x)}$. Ker je $I_{\gamma(x)}$ odprt interval, obstaja $\delta(x) > 0$: $(x - \delta(x), x + \delta(x)) \subset I_{\gamma(x)}$.

Po lemi o pokritjih obstaja $m \in \mathbb{N}$ in $x_1, \dots, x_m$:

$$K \subset (x_1 - \delta(x_1), x_1 + \delta(x_1)) \cup \dots \cup (x_m - \delta(x_m), x_m + \delta(x_m)) \subset \bigcup_{i=1}^{m} I_{\gamma(x_i)}$$

F11

LASTNOSTI ZVEZNIH FUNKCIJ

__Izrek__ (bisekcija) Naj bo f zvezna funkcija na zaprtem intervalu $[a,b]$.
Če ima f v krajiščih nasprotno predznačeni vrednosti, potem ima f ničlo. Natančneje, če je $f(a)\cdot f(b)<0$, potem obstaja $d\in[a,b]$: $f(d)=0$.

__Dokaz__. Metoda bisekcije: $c=\frac{a+b}{2}$.
Če je $f(c)=0$, končamo.
Sicer označimo z $[a_1,b_1]$ tistega od podintervalov $[a,c]$, $[c,b]$, na katerem ima f v krajiščih nasprotno predznačeni vrednosti.
Izračunamo $c_1=\frac{a_1+b_1}{2}$ in postopek nadaljujemo.
Postopek se lahko ustavi ni smo ničlo našli, ali pa ne.
V tem primeru dobimo zaporedje vloženih intervalov

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset\dots$$

za katerega velja $\quad b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$ in

$$f(a_n)\cdot f(b_n)<0.$$

Vemo, da obstaja natanko ena točka d, ki je vsebovana v vseh intervalih (po izreku od prej).
Zaradi zveznosti: $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=f(d)=\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)$.
Ker velja $f(a_n)\cdot f(b_n)<0$, je $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)f(b_n)=f(d)^2\leq 0$.

Sledi $f(d)=0$ ▨

Opomba. $f(x) = \begin{cases} -1, & 2 \le x \le 4 \\ 1, & 4 < x \le 7 \end{cases}$

Za $f: [2,7] \to \mathbb{R}$ izrek ne velja.

Opomba. Bisekcija je metoda za približno iskanje ničel.

Izrek. Naj bo f zvezna funkcija na zaprtem intervalu $[a,b]$.
Potem je f omejena. Označimo $m = \inf f$ in $M = \sup f$.
Obstajata točki $x_m, x_M \in [a,b]$, da velja $f(x_m) = m$, $f(x_M) = M$.

Opomba. Zvezna funkcija na zaprtem intervalu doseže minimum in maksimum.

Dokaz. Denimo, da f ni navzgor omejena.
Potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja $x_n \in [a,b]$: $f(x_n) \ge n$.
Zaporedje x_n je omejeno, zato ima stekališče $x \in [a,b]$.
Obstaja konvergentno podzaporedje $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x$.
Ker je f zvezna, velja $f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x)$.
Ker velja $f(x_{n_k}) \ge n_k$ $\forall k$, to zapor. ni omejeno $\times$.
Torej je f omejena in naj bo $M = \sup f$.
Velja $f(x) \le M$ za vsak $x \in [a,b]$.
Denimo, da f ne doseže vrednosti M, tj. $M - f(x) > 0$ vsak $x \in [a,b]$ in $M \ne f$.
Ker je f zvezna, sta funkciji $M - f$ in $\frac{1}{M-f}$ zvezni na $[a,b]$.
Po pravkar dokazanem je $\frac{1}{M-f}$ omejena: $0 < \frac{1}{M-f} \le A$, $x \in [a,b]$.
Odtod sledi: $M - f \ge \frac{1}{A}$, oziroma $f \le M - \frac{1}{A}$ $\times$

ker je $M = \sup f$. $\boxtimes$

Torej obstaja x_M: $f(x_M) = M$.

Posledica. Naj bo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ zvezna funkcija in $m=\inf f$, $M=\sup f$. Potem f zavzame vse vrednosti med m in M, tj. za vsak $c\in[m,M]$ obstaja $x_c\in[a,b]$: $f(x_c)=c$.

Dokaz. Če je $m=M$ ✓

sicer $m<c<M$ in definiramo $g(x)=f(x)-c$.

Naj bo I zaprt interval s krajiščema x_m in x_M.

Potem ima g v krajiščih I nasprotno predznačeni vrednosti.

Po izreku o bisekciji ima g na I ničlo x_c; in velja $f(x_c)=c$. $\boxtimes$

v 3.1.2012

MONOTONE ZVEZNE FUNKCIJE

Definicija. Naj bo $I\subset\mathbb{R}$ interval in $f:I\to\mathbb{R}$ funkcija.
Pravimo, da je f naraščajoča (na I), če za $x_1,x_2\in I$, $x_1\le x_2$ velja $f(x_1)\le f(x_2)$,
strogo naraščajoča, če za $x_1,x_2\in I$, $x_1<x_2$ sledi $f(x_1)<f(x_2)$.

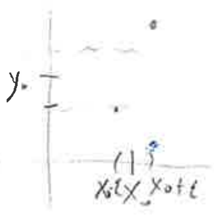
Podobno padajoča in strogo padajoča.

Funkcija f je monotona, če je naraščajoča ali padajoča.

Izrek. Naj bo f strogo monotona zvezna funkcija na $[a,b]$. Potem je f^{-1} zvezna funkcija.

Dokaz. Denimo, da je f str. naraščajoča.
Tedaj je f injektivna in doseže vse vrednosti od najmanjše $f(a)$ do največje $f(b)$. Inverzna funkcija f^{-1} obstaja in slika $[f(a),f(b)]$ na $[a,b]$.

Naj bo $y_0\in(f(a),f(b))$ in označimo $x_0=f^{-1}(y_0)$.



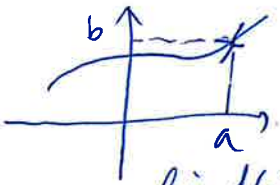
Izberimo $\varepsilon>0$. Privzeti smemo, da je $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\subset[a,b]$.

Ker je f str. naraščajoča, velja: $f(x_0-\varepsilon)<f(x_0)=y_0<f(x_0+\varepsilon)$

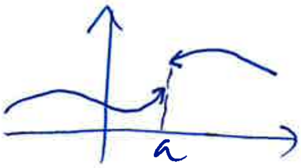
$\delta:=\min\{f(x_0+\varepsilon)-y_0,\ y_0-f(x_0-\varepsilon)\}$

LIMITA FUNKCIJE

Radi bi opisali obnašanje funkcije, ki je definirana v okolici točke a ali ne nujno v a:



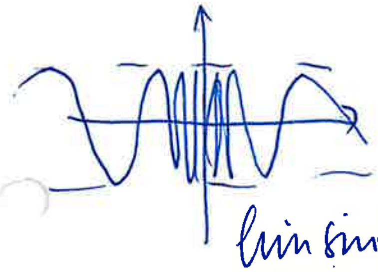
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$



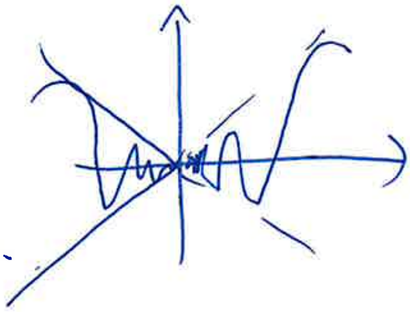
limita ne obstaja, ker ni take vrednosti, ki bi se ji funkcijske vrednosti poljubno približale, ko $x\to a$

$x\sin\frac{1}{x}$

$\sin\frac{1}{x}$



$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ ne obst.



$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0.$

Definicija. Naj bo funkcija f definirana na preboden okolici točke a, tj. obstaja $r>0$, da je f definirana na $(a-r,a+r)\setminus\{a\}$. Število L imenujemo <u>limita funkcije f, ko gre x proti a</u>, če za vsak $\varepsilon>0$ obstaja $\delta>0$, da velja

$$|f(x)-L|<\varepsilon, \text{ čim je } |x-a|<\delta, x\neq a.$$

V tem primeru pišemo: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$.

Opomba 1) Nikjer v definiciji ni omenjena vrednost $f(a)$ (niti ni potrebno, da bi bila f v točki a definirana).

Trditev. Naj bo funkcija f definirana v okolici točke a.
Funkcija f je zvezna v točki a $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

tj. limita f v a obstaja in velja enačaj.

Sledi neposredno po definiciji.

Posledica. Naj bo funkcija f defin. v preboden okolici t. a. Če obstaja $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$, potem je funkcija $\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq a, x\in D_f \\ L, & x=a\end{cases}$ zvezna.

Odtod sledi:

Izrek. Naj bo funkcija f definirana v preboden okolici U točke a.

Limita funkcije f, ko gre x proti a je L; natanko tedaj, kadar za vsako zaporedje x_n v U, ki konvergira proti a, zaporedje $f(x_n)$ konvergira proti L.

Zato za računanje z limitami funkcij veljajo enaka pravila kot za računanje z limitami zaporedij:

Izrek. Naj bosta funkciji f in g definirani v preboden okolici točke a in denimo, da obstajata $\lim_{x\to a} f(x)$ in $\lim_{x\to a} g(x)$. Potem obstajajo $\lim_{x\to a}(f\pm g)(x)$ in $\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x)$ in velja:

$$\lim_{x\to a}(f\pm g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x).$$

$$\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right).$$

Če je $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, potem obstaja $\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ in velja

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

Definicija. Naj bo f definirana na $(a-r, a)$ za nek $r>0$. Pravimo, da je L <u>leva limita funkcije f v točki a</u> če za $\forall \varepsilon>0$ obstaja tak $\delta>0$, da je $|f(x)-L|<\varepsilon$, čim $x\in(a-\delta, a)$.

V tem primeru pišemo:

$$f(a-) = \lim_{x\nearrow a} f(x) = L.$$

Podobno <u>desna limita</u>.

Trditev. Naj bo f definirana v preboden okolici točke a.

Tedaj $\lim_{x\to a} f(x)$ obstaja natanko tedaj, kadar obstajata leva in desna limita in sta enaki. Dokaz z definicijo.

Izrek. Naj bo f monotona na $[a,b]$. Tedaj za vsak $c \in (a,b)$ obstajata $f(c-)$ in $f(c+)$. Funkcija f je zvezna v točki c natanko tedaj, kadar je $f(c-)=f(c+)$.

Či je f naraščajoča, je $f(c-) \leq f(c) \leq f(c+)$,

či je f padajoča, je $f(c+) \leq f(c) \leq f(c-)$.

Definicija. Či monotona funkcija f na $[a,b]$ ni zvezna v točki c, potem $f(c+)-f(c-)$ imenujemo skok funkcije f v c.

Dokaz. naj bo f naraščajoča in $a<c<b$.

Tedaj je $f(x) \leq f(c)$ za vsak $x \in [a,c]$, zato obstaja $\sup\{f(x);\ a \leq x<c\}=A$.

Izb. $\varepsilon>0$. Po defin. sup $\exists\ x_0 \in [a,c) : f(x_0)>A-\varepsilon$.

Ker je f naraščajoča, za $x \in (x_0,c)$ velja

$$A-\varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq A$$

Torej je $\lim\limits_{x \nearrow c} f(x)=A$. ∎

Izrek. Monotona funkcija f na $[a,b]$ ima kvečjemu števno mnogo točk nezveznosti.

Dokaz. Naj bo N množica točk nezveznosti od f.

Za vsak $c \in (a,b) \cap N$ $\exists\ r_c \in \mathbb{Q}$: $r_c \in (f(c-), f(c+))$.

Zaradi monotonosti za $c \neq d$ velja $r_c \neq r_d$.

Torej je preslikava $c \mapsto r_c$, $N \to \mathbb{Q}$ injektivna, zato je N kvečjemu števna.

Definicija. Naj bo funkcija f definirana na (a,∞) za nek $a \in \mathbb{R}$. Število L je limita funkcije f, ko gre x čez vse meje, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $M \in \mathbb{R}$: za vse $x > M$ velja $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Pišemo $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$.

Podobno $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

V tem primeru je $y = L$ vodoravna asimptota.

Definicija. Naj bo funkcija f definirana na prebodeni okolici točke a. Pravimo, da f izpolnjuje Cauchyjev pogoj v a, če

$$\text{za } \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, x', \ 0 < |x - a| < \delta, \ 0 < |x' - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Podobno Cauchyjev pogoj v ∞ in $-\infty$.

Izrek. Naj bo funkcija f definirana v prebodeni okolici točke a. Funkcija f ima limito v točki a natanko tedaj, kadar f izpolnjuje Cauchyjev pogoj.

(velja tudi za $a = \infty, -\infty$).

Definicija. Naj bo f definirana v prebodeni okolici točke a. Potem je limita funkcije f, ko gre x proti a neskončno, če za $\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 : \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} \Rightarrow$

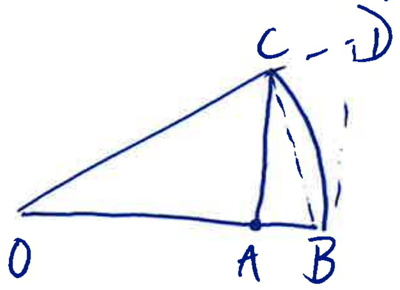
$$\Rightarrow |f(x)| > M.$$

Podobno za levo, desno in $-\infty$.

Pišemo $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

F23

Primeri. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.



$OC = OB = 1$
$AC = \sin x$
$BD = \tan x$

$$pl(\triangle OBC) \le pl(\text{izsek kroga } OBC) \le pl(\triangle OBD)$$

$$\tfrac{1}{2}\sin x \le \tfrac{1}{2}x \le \tfrac{1}{2}\tan x \quad \text{za } \forall x \in [0, \pi/2). \quad /:x$$

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$$

$$\cos x \xrightarrow[x\to 0]{} 1, \qquad 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

Torej $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

(pravilo sendviča velja tudi za računanje z limitami funkcij).

2) $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \qquad D_f = (-\infty,-1)\cup(0,\infty)$.

Vemo: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ in $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e$.

Označimo $n = [x]$: $n \le x < n+1$

Za $x \in [n, n+1)$ velja:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{\to\, e} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}}_{\to\, 1} \qquad (x\to\infty)$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to\, e} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\to\, 1} \qquad (x\to\infty)$$

Sledi: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

3) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a^h-1}{h} = \ln a.$

$a^h = 1 + \frac{1}{x}$; $h\to 0, h>0, \ x\to\infty$

$h = \log_a\left(1+\frac{1}{x}\right)$

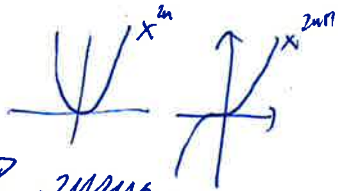
$$\frac{a^h-1}{h} = \frac{1}{x}\cdot \log_a^{-1}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \log_a^{-1}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{\log_a e} = \ln a$$

Če je $|y-y_0|<\delta$, potem je $f(x_0-\varepsilon)<y<f(x_0+\varepsilon)$

in zaradi str. nar.: $x_0-\varepsilon<f^{-1}(y)<x_0+\varepsilon$.

Torej ~~za~~ za $|y-y_0|<\delta$ sledi $|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|<\varepsilon$. $\blacksquare$

Podobno za robne točke.



Primer. $f(x)=x^n$:

- če je $n\in\mathbb{N}$ liho število, f strogo naraščajoča na $\mathbb{R}$, zvezna, zato je $x\mapsto\sqrt[n]{x}$ zvezna funkcija na $\mathbb{R}$.
- če je n sod, je $x\mapsto\sqrt[n]{x}$ zvezna na $[0,\infty)$.

Posledica. $f(x)=x^r$ je zvezna funkcija na $(0,\infty)$ za vsak $r\in\mathbb{Q}$. (Če je $r>0$ je zvezna na $[0,\infty)$).

ZVEZNOST POSEBNIH FUNKCIJ

Eksponentna funkcija. Naj bo $a>0$. Za vsak $x\in\mathbb{R}$ ~~smo~~ že definirali a^x ($x=\lim_{n\to\infty} r_n$, $r_n\in\mathbb{Q}$ in $a^x=\lim_{n\to\infty}a^{r_n}$.) Iz pravil za računanje z racionalnimi potencami se pravila prenesejo na realne: $a^{x+y}=a^x\cdot a^y$.

Izrek. Naj bo $a>0$, $a\neq 1$. Eksponentna funkcija $x\mapsto a^x$ je zvezna na $\mathbb{R}$, njena zaloga vrednosti je $(0,\infty)$.
Če je $a>1$, potem je naraščajoča, če je $a<1$, je padajoča.

Dokaz. preverimo, da je naraščajoča za $a>1$:
$x_1<x_2$: $a^{x_2}=a^{x_2-x_1}\cdot a^{x_1}$. Ker je $x_2-x_1>0$, je $a^{x_2-x_1}>1$ (ker je res za racionalne približke).

zveznost: naj bo $a>1$. izb. $\varepsilon>0$.
vemo že, da obstaja $\delta>0$, da je $|a^h-1|<\varepsilon$, čim je $h\in\mathbb{Q}, |h|<\delta$.
Ker je a^x naraščajoča, sledi, da $|a^h-1|<\varepsilon$ velja za $h\in\mathbb{R}, |h|<\delta$.
Torej je a^x zvezna v $x=0$.
Naj bo $x_0\in\mathbb{R}$ poljubna in $\varepsilon>0$. dokazujemo zv. v x_0.

$$|f(x)-f(x_0)|=|a^x-a^{x_0}|=a^{x_0}|a^{x-x_0}-1|<\varepsilon$$

obstaja $\delta>0$: če $|h|<\delta$, potem $|a^h-1|<\varepsilon/a^{x_0}$.
če je $|x-x_0|<\delta$, ocena sledi.

Vemo, da je $\lim_{n\to\infty} a^n=\infty$ in $\lim_{n\to\infty} a^{-n}=0$.

Na intervalu $[-m,m]$ doseže a^x vse vrednosti med a^{-m} in a^m, torej na $\mathbb{R}$ doseže vse vrednosti na $(0,\infty)$. $\blacksquare$

<u>Posledica</u>. Naj bo $a>0, a\neq 1$. Potem velja

$$(a^x)^y=a^{xy} \quad \text{za } \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

<u>Dokaz</u>. $p_n\to x \quad p_n\in\mathbb{Q}$
$q_m\to y \quad q_m\in\mathbb{Q}$.

Velja $(a^{p_n})^{q_m}=a^{p_n\cdot q_m} \quad \forall n,m.$

$$\begin{array}{ccc}
(a^{p_n})^{q_m} & = & a^{p_n q_m} \\
\text{zv. } x^{q_m} \text{ in defin } \downarrow {\scriptstyle n\to\infty} & & \downarrow {\scriptstyle n\to\infty} \text{ po defin. potence} \\
(a^x)^{q_m} & = & a^{x q_m} \\
\text{defin. } b^y \downarrow {\scriptstyle m\to\infty} & & \downarrow {\scriptstyle m\to\infty} \text{ po defin.; a je } x\in\mathbb{Q} \text{ ok.} \\
(a^x)^y & & a^{xy}
\end{array}$$

sicer $a^{p_n q_m}\to a^{xy}$ ($n,m\to\infty$)

ker je a^c zvezna, je vseeno, po katerem zaporedju --

<u>Posledica</u>.

Definicija. Naj bo $a \in (0,\infty)$, $a \neq 1$. Inverzno funkcijo funkcije $x \mapsto a^x$ imenujemo <u>logaritemska funkcija</u> z osnovo a in ... označimo $\log_a$. Logaritem z osnovo e označimo z $\ln$ in imenujemo <u>naravni logaritem</u>.

Opomba. $\log_a$ preslika $(0,\infty)$ bijektivno na $\mathbb{R}$ in po definiciji inverzne funkcije velja:

$$(*) \qquad y = \log_a x \iff a^y = x .$$

Izrek. Funkcija $\log_a$ je zvezna na $(0,\infty)$. Če je $a>1$, je strogo naraščajoča, če je $a<1$ je strogo padajoča.

Velja:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \quad x, y \in (0,\infty)$$

$$\log_a(x^\lambda) = \lambda \log_a x, \quad x \in (0,\infty), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dokaz. Ker je a^x zvezna injektivna ima zvezen inverz.

Enakosti sledita iz $(*)$ in pravil za računanje potenc.

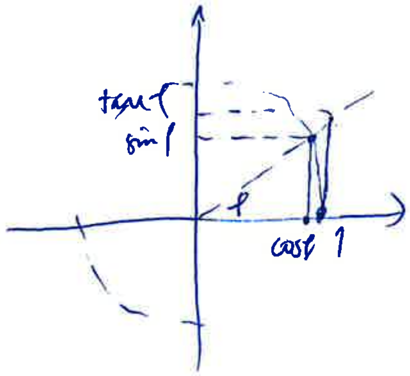
$$\log_a x = c_1 \text{ in } \log_a y = c_2 \Rightarrow a^{c_1} = x \text{ in } a^{c_2} = y$$

$$\Rightarrow a^{c_1} \cdot a^{c_2} = xy \Rightarrow a^{c_1+c_2} = xy \Rightarrow c_1 + c_2 = \log_a(xy) \quad \blacksquare$$

Posledica. $y \in \mathbb{R}$. $x \mapsto x^y$ je zvezna.

$$x^y = e^{\ln x^y} = e^{y \ln x} \text{ je zvezna}$$

TRIGONOMETRIČNE FUNKCIJE



φ kot (ki ga merimo v radianih)

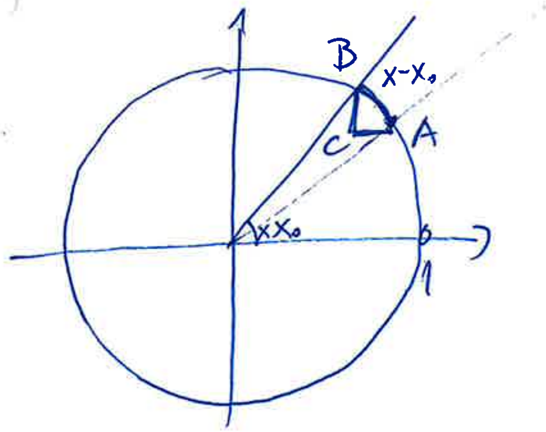
$\cos\varphi$, $\sin\varphi$ za $\varphi \in [0, 2\pi)$

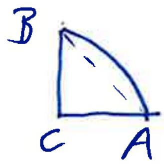
nadaljujemo periodično.

Ker je $\sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) = \cos\varphi$ je za izpeljavo osnovnih lastnosti (npr. zveznost, ..) dovolj obravnavati sin.

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

Osnovne lastnosti: proseminar A.





V krožnem izseku sta dolžini stranic $|\sin x - \sin x_0|$ in $|\cos x - \cos x_0|$ ter dolžina loka $|x - x_0|$.

Zato velja: $|\sin x - \sin x_0| \leq |x - x_0|$ in
$|\cos x - \cos x_0| \leq |x - x_0|$

Izrek. Sinus je zvezna funkcija na $\mathbb{R}$.

Dokaz. Izb. $x_0 \in \mathbb{R}$ in $\varepsilon > 0$.

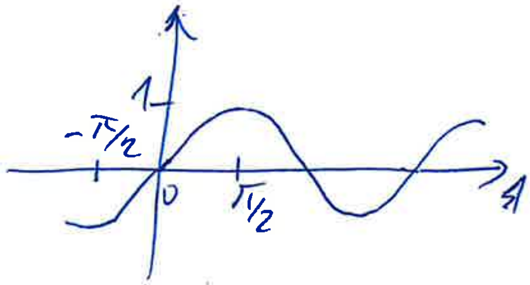
Ker je $|\sin x - \sin x_0| \leq |x - x_0| < \delta = \varepsilon$

lahko vzamemo $\delta = \varepsilon$. ∎

Posledica. Funkcije cosinus, tangens in kotangens so zvezne

CIKLOMETRIČNE FUNKCIJE

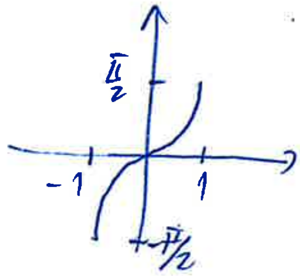
$\sin\big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ je injektivna.



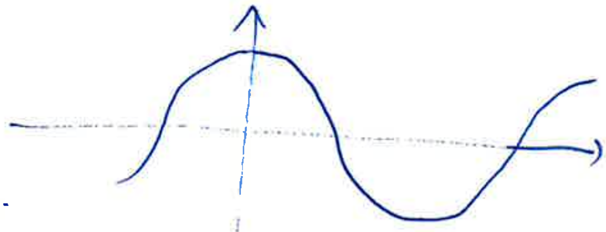
Inverzno funkcijo imenujemo arkus sinus in označimo arcsin.

$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Po izreku je arcsin zvezna funkcija.

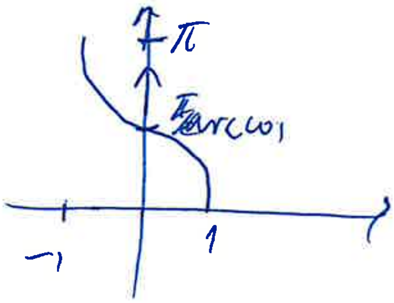


$\cos\big|_{[0, \pi]}$ je injektivna

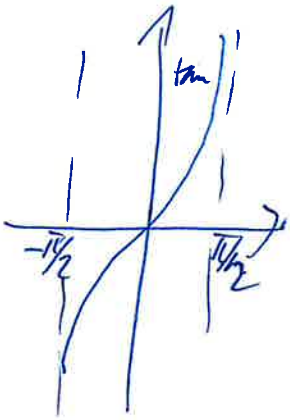


Inverzno f. im. arkus kosinus.

$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ je zvezna funkcija.



$\tan\big|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$ je injektivna.



Inv. funkcije imenujemo $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$