ODVOD

Motivacija: trenutna hitrost.

povprečna hitrost telesa, ki se giblje premočrtno in je v času t, $s(t)$ oddaljeno od izhodišča:
povpr. hitrost telesa na čas. intv. $[a, a+h]$ je

$$\frac{s(a+h)-s(a)}{h}.$$

trenutna hitrost: $v(a) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{s(a+h)-s(a)}{h}$.

Definicija. Naj bo funkcija f definirana v okolici točke a.
Če obstaja $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, jo imenujemo odvod funkcije f v točki a in jo označimo z $f'(a)$ in pravimo, da je f odvedljiva v točki a.

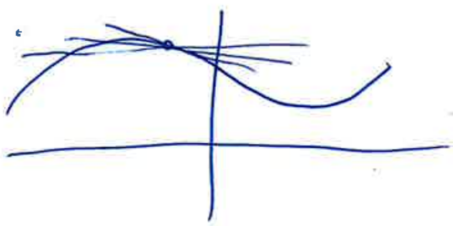
Velja. Če je f odvedljiva v točki a, potem velja:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Kvocient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ se imenuje diferenčni kvocient.

Označimo tudi $\Delta f = f(x)-f(a)$, $\Delta x = x-a$
↑ diferenca ~ razlika

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}.$$



Geometrijski pomen odvoda:
$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ je smerni koeficient sekante na graf funkcije f skozi točki $(a, f(a))$ in $(a+h, f(a+h))$.
Če je f odvedljiva v točki a, je $f'(a)$ smerni koef. tangente na $\Gamma(f)$ v tč. $(a, f(a))$.

Primer. $f(x)=x^2$ v točki 3.

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+6h+9-h^2}{h}=6.$$

Izrek. Naj bo funkcija f definirana v okolici točke a.
Če je f odvedljiva v a, potem je f zvezna v a.

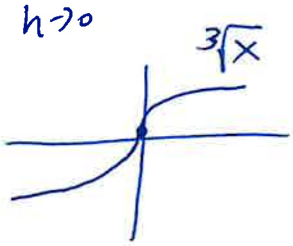
Opomba. Obratno ni res.

Dokaz. $$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\left(f(a)+(x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)=$$
$$=f(a)+0\cdot f'(a)=f(a)\quad\boxtimes$$

Opomba. Obstaja zvezna funkcija na $[a,b]$, ki ni odvedljiva v nobeni točki.

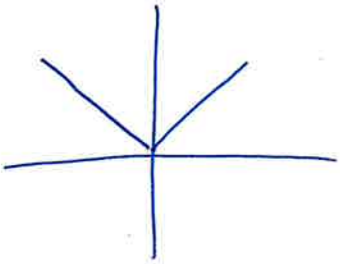
Primer. 1) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ je zvezna na $\mathbb{R}$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}}{h}=\lim_{h\to 0}h^{-\frac{2}{3}}=\infty$$



Zato f ni odvedljiva v 0.
Ima v 0 navpično tangento.

2) $f(x)=|x|$ je zvezna na $\mathbb{R}$



$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$ ne obstaja, ker leva in desna limita nista enaki

3) na listu

Definicija. Naj bo funkcija f definirana na $(a-r,a]$ za nek $r>0$.
Če obstaja $\lim_{x\nearrow a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ jo imenujemo levi odvod funkcije f v točki a. Podobno desni odvod.

Primer 3) $f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

Vemo, da je f zvezna.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\sin\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \sin\frac{1}{h} \text{ ne obstaja.}$$

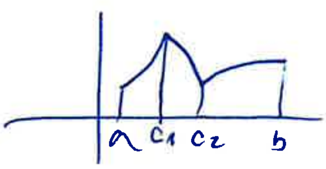
Trditev. Naj bo funkcija f definirana v okolici točke a. Funkcija f je odvedljiva v točki a natanko tedaj, kadar obstajata levi in desni odvod funkcije f v a in sta enaka.

Definicija. Naj bo f funkcija.
Funkcija f je odvedljiva na (a,b), če je odvedljiva v vsaki t. iz (a,b).
Funkcija f je odvedljiva na $[a,b]$, če je odvedljiva v vsaki t. na (a,b) in ima v krajišču a levi, v krajišču b pa desni odvod.

Definicija. Naj bo f funkcija na intervalu I, ki je odvedljiva vsaj v kakšni točki iz I. Naj bo $I' = \{x \in I;\ f'(x) \text{ obstaja}\}$. Funkcijo $f': I' \longrightarrow \mathbb{R}$, ki je definirana s predpisom $x \longmapsto f'(x)$ imenujemo odvod funkcije f.

Definicija Naj bo I interval in f funkcija na I. Pravimo, da je f zvezno odvedljiva na I, če je f odvedljiva na I in je njen odvod f' zvezna funkcija na I.

Definicija. Naj bo $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Pravimo, da je f odsekoma zvezno odvedljiva, če je odvedljiva povsod razen v končno mnogo točkah $c_1, c_2, \ldots, c_k$, $a < c_1 < c_2 < \ldots < c_k < b$, v katerih obstajata levi in desni odvod. Na vsakem intervalu $[a, c_1], [c_1, c_2], \ldots, [c_{k-1}, c_k], [c_k, b]$ pa je zvezno odvedljiva.



DIFERENCIAL

Naj bo funkcija f odvedljiva v točki a.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Torej $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)}{h}=0$$

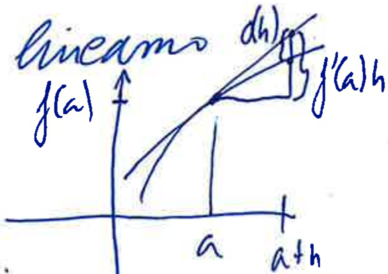
Števec označimo z $o(h)$ in dobimo:

$$f(a+h)-f(a)=f'(a)\cdot h+o(h),\ \text{kjer je } \lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0.$$

To pomeni, da $f(a+h)-f(a)\underset{\uparrow \text{ aproks.}}{\approx} f'(a)\cdot h$ za majhne h.

funkcija $h\mapsto f'(a)h$ je linearna funkcija.

Izpeljali smo, da je mogoče za odv. funkcijo v točki a v okolici točke a „dobro" (razliko $f(a+h)-f(a)$) aproksimirati z linearno funkcijo.



Definicija. Naj bo funkcija f definirana v okolici točke a. Pravimo, da je f <u>diferenciabilna v točki a</u>, če obstaja linearna funkcija $L: h\overset{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}{\longmapsto} L(h)$, da velja

$$f(a+h)-f(a)=L(h)+o(h),\ \text{kjer je } \lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0.$$

Linearno funkcijo L imenujemo <u>diferencial funkcije f v točki</u> in označimo $df(a)$:

<u>Opomba.</u> 1) Vse linearne funkcije $L:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ so oblike $L(h)=Ah$ za neki $A\in\mathbb{R}$.

2) Zgoraj smo izpeljali, da je funkcija, ki je odvedljiva, diferenciabilna na.

Izrek. Naj bo funkcija f definirana v okolici točke a. Potem je f diferenciabilna v t. a natanko tedaj, kadar je f odvedljiva v točki a. Tedaj velja: $df(a)h = f'(a)\cdot h$.

Dokaz. ($\Leftarrow$) že vemo.

($\Rightarrow$) $\sigma(h) = f(a+h) - f(a) - Ah$ za nek $A \in \mathbb{R}$, kjer je

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sigma(h)}{h} = 0.$$

Torej $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-Ah}{h} = 0 \Rightarrow A = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Torej je f odvedljiva v t. a in $df(a)h = f'(a)h$ $\blacksquare$

Aproksimacija funkcije f z diferencialom pomeni, da je $df(a)h$ dobra aproksimacija za $\Delta f = f(a+h) - f(a)$.

Zapis. f odvedljiva v x. Pišimo $\Delta x = h$ in dobimo:

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \sigma(\Delta x), \text{ kjer je } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sigma(\Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

diferencial f v točki x ob spremembi Δx.

Vemo: $df(x)\Delta x = f'(x)\Delta x$

Če vzamemo $f(x) = x$, dobimo: $dx = 1\Delta x$.

Torej: $df = f'(x)dx$.

Kar nekomu označi: $f'(x) = \frac{df}{dx}$.

PRAVILA ZA ODVAJANJE

1) $f(x)=c \ \forall x$. $\quad f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$

2) Če sta funkciji f in g odvedljivi v točki a, potem so funkcije tudi $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ odvedljive v točki a in velja

$$(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$$
$$(f-g)'(a)=f'(a)-g'(a)$$
$$(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a).$$

Če je $g(a)\neq 0$, potem je $\frac{f}{g}$ odvedljiva v a in velja:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

<u>Dokaz</u>. Za vsoto in razliko sledi, ker je limita vsote, vsota limit.

$$(f\cdot g)'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(a+h)-(f\cdot g)(a)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a+h)g(a)+f(a+h)g(a)-f(a)g(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}f(a+h)+\lim\frac{f(a+h)-f(a)}{h}g(a)$$
$$=g'(a)f(a)+f'(a)g(a).$$

<u>Posledica</u>. Če je f odvedljiva funkcija v a in $\lambda\in\mathbb{R}$, potem velja

$$(\lambda f)'(a)=\lambda f'(a).$$

<u>Posledica</u>. Če so $f_1,\dots,f_n$ odvedljive funkcije v točki a, potem

$$(f_1\cdots f_n)'(a)=f_1'(a)f_2(a)\cdots f_n(a)+f_1(a)f_2'(a)f_3(a)\cdots f_n(a)+\dots+$$
$$f_1(a)f_2(a)\cdots f_{n-1}(a)f_n'(a).$$

3) Odvod kompozicije:

Naj bo f odvedljiva v t. a in g odvedljiva v t. $f(a)$.

Potem je $g \circ f$ odvedljiva v točki a in velja:

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Dokaz. Označimo $b = f(a)$.

$$g(b+k) = g(b) + k \cdot g'(b) + o_g(k), \quad \text{kjer je } \lim_{k \to 0} \frac{o_g(k)}{k} = 0.$$

$$f(a+h) = \underset{\overset{\parallel}{b}}{f(a)} + h \cdot f'(a) + o_f(h), \quad \text{kjer je } \lim_{h \to 0} \frac{o_f(h)}{h} = 0$$

velja: $\lim_{h \to 0} (\overset{\parallel\, k(h)}{h f'(a) + o_f(h)}) = 0$

$\lim_{h \to 0} \frac{k(h)}{h} = f'(a)$

$$g(f(a+h)) = g(b + \overbrace{h f'(a) + o_f(h)}^{k(h)}) =$$

$$= g(b) + (h f'(a) + o_f(h)) g'(b) + o_g(k) =$$

$$= g(b) + h f'(a) g'(b) + g'(b)\, o_f(h) + o_g(k)$$

$$\frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h} = f'(a) \cdot g'(b) + g'(b) \underset{\downarrow\, 0}{\frac{o_f(h)}{h}} + \underset{\downarrow\, 0}{\frac{o_g(k)}{h}}$$

$$\lim_{k \to 0} \frac{o_g(k)}{h} = \lim_{h \to 0} \underset{\downarrow\, 0}{\frac{o_g(k)}{k}} \cdot \underset{\downarrow\, f'(a)}{\frac{k(h)}{h}} = 0$$

$\boxtimes$

Opomba. $\frac{d(g \circ f)}{dx} = \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{dx}$.

Izrek. Naj bo f zvezna, strogo monotona na $[a,b]$, $c \in (a,b)$ in f odvedljiva v c, $\underline{f'(c) \neq 0}$. Potem je f^{-1} odvedljiva v točki $f(c)=d$ in velja

$$(f^{-1})'(d) = \frac{1}{f'(c)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(d))}.$$

Dokaz. za str. naraščajoče:

f^{-1} je zvezna na $[f(a), f(b)]$, zato velja:

$$\lim_{y \to d} f^{-1}(y) = f^{-1}(d) = c$$

Zaradi zveznosti v točki d:

$x = f^{-1}(y)$

$$(f^{-1})'(d) = \lim_{y \to d} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(d)}{y - d} = \lim_{y \to d} \frac{x - c}{f(x) - f(c)} =$$

$$= \lim_{x \to c} \frac{x - c}{f(x) - f(c)} = \frac{1}{f'(c)}. \quad \blacksquare$$

Geom. pomen: če premico zrcališ preko simetrale lihih kvadrantov, je koeficient zrcaljene premice obratna vrednost koef. originala.

Opomba. Če vemo, da je f^{-1} odvedljiva, potem njen odvod izračunamo iz verižnega pravila:

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

Opomba. $f(x) = x^3$ na $[-1,1]$.

f^{-1} v točki 0 ni odvedljiva.

ODVODI ELEMENTARNIH FUNKCIJ

1) Vemo: $f(x) = c$ konstantna funkcija
$f'(x) = 0$

$$g(x) = x: \quad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$$

$n \in \mathbb{N}$ $h(x) = x^n$: $h'(x) = (x \cdots x)' = 1 \cdot x \cdots x + x \cdot 1 \cdot x \cdots x + \cdots + x \cdots x \cdot 1 = nx^{n-1}$

$$h(x) = x^{-n} \quad h'(x) = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = (-n)x^{-n-1}$$

$h(x) = \sqrt[n]{x}$: $g: x \mapsto x^n$ je strogo monotona na $(0,\infty)$ za sode n

— \|\| — na $\mathbb{R}$ za lihe n

$$g'(x) = nx^{n-1} \quad : \quad g'(x) \neq 0 \text{ za } x \neq 0.$$

Torej: ker je inv. funkcija odv. funkcije je njen odvod na $(0,\infty) \neq 0$, je odvedljiva za sode n in odvedljiva na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ za lihe n.

Izrač. odvod:

$$(h(x))^n = x \quad \text{za vse } x$$

$$n\, h^{n-1}(x) h'(x) = 1$$

$$h'(x) = \frac{1}{n\, h^{n-1}(x)} = \frac{1}{n x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{-1+\frac{1}{n}}$$

$$h(x) = x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

$$h'(x) = m \cdot \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = m x^{\frac{m-1}{n}} \cdot \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} =$$

$$= \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$$

2) odvod logaritemske funkcije

$$f(x) = \log_a x$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}\cdot x\cdot \frac{1}{x}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{x} \log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} =$$

zvezn.

$$= \frac{1}{x} \log_a \underbrace{\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}}_{e} =$$

$$= \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}$$

Torej: $\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}.}$$

3) odvod eksponentne funkcije

eksponentna funkcija je inverzna funkcija strogo monotone funkcije, ki ima odvod vedno od nič različen, zato je odvedljiva. Izrač. njen odvod:

$$f(x) = a^x$$

$$\log_a(a^x) = x \quad /'$$

$$\frac{1}{\ln a}\;\frac{1}{a^x}\cdot (a^x)' = 1$$

$$\boxed{(a^x)' = a^x\cdot \ln a} \qquad \boxed{(e^x)' = e^x}$$

4) odvod potenčne funkcije z realnim eksponentom,

$y\in\mathbb{R}$. $x^y = e^{y\ln x}$

$$(x^y)' = (e^{y\ln x})' = e^{y\ln x}\cdot y\cdot\frac{1}{x} = y\cdot x^{y-1}$$

$$\boxed{(x^y)' = y x^{y-1}, \quad y\in\mathbb{R}}$$

5) Odvodi kotnih funkcij $\qquad \sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$f(x)=\sin x$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\cdot\sin\frac{h}{2}}{h}=$$

$$=\underbrace{\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}_{\substack{\| \text{ zv. cos} \\ \cos x}}\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{\substack{\| \text{ vemo} \\ 1}}=\cos x$$

$g(x)=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$g'(x)=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot(-1)=\sin x$

$$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

6) Odvodi ciklometričnih funkcij

Sinus je strogo naraščajoča na $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ in ima na $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ neničelni odvod. Zato je arcsin odvedljiva na $(-1,1)$.

$\sin(\arcsin x)=x \quad /'$

$\cos(\arcsin x)\cdot(\arcsin x)'=1$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\cos(\arcsin x)}=\frac{1}{\underset{(\mp)}{\pm}\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}}=$$

$\cos\arcsin x>0$, ker je $\arcsin x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Podobno: $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ali pa iz: $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

tangens je str. nar. na $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ z neničelnim odvodom:

$\tan(\arctan x)=x \quad /'$

$\frac{1}{\cos^2(\arctan x)}\cdot(\arctan x)'=1$

$$(\arctan x)' = \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

hiperbolične in tabela odvodov: vaje.

ODVODI VIŠJEGA REDA

Denimo, da je f odvedljiva funkcija na intervalu I. Potem je njen odvod f' funkcija, definirana na I. Če je funkcija f' odvedljiva na I, jo imenujemo drugi odvod funkcije f na I in označimo z f''.

Višje odvode definiramo induktivno: n-ti odvod funkcije f je odvod $(n-1)$-odvoda: $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Primer. 1) $f(x) = e^x$
$f^{(n)}(x) = e^x \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) $f(x) = x^k$
$f'(x) = k x^{k-1}, \quad f''(x) = k(k-1)x^{k-2}, \ldots$
$f^{(k)}(x) = k! \quad f^{(k+l)}(x) = 0 \quad \forall l \in \mathbb{N}.$

Oznake. Naj bo I zaprt interval

$C(I) = C^0(I)$ označuje množico vseh zveznih funkcij na I.

$C^1(I)$ označuje mn. vseh zvezno odvedljivih funkcij na I, to so funkcije, ki so odvedljive na I in je njihov odvod f' zvezna funkcija na I.

$C^r(I)$ oz. mn. vseh r krat zvezno odv. funkcij na I, tj. r krat odv. in $f^{(r)}$ zv. na I.

$$C^\infty(I) = \bigcap_{r=1}^{\infty} C^r(I)$$

Ker za $f, g \in C^r(I)$ $(r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$ velja:

$\lambda f, f+g \in C^r(I)$ $\lambda \in \mathbb{R}$, je

$C^r(I)$ vektorski prostor.

Trditev. Preslikava $D: C^r(I) \to C^{r-1}(I)$, definirana s predpisom $f \mapsto f'$ je linearna preslikava.

Opomba. $D: C^\infty(I) \to C^\infty(I)$

$$D^2: C^r(I) \to C^{r-2}(I)$$

Pišemo $D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$, $D^k = \frac{d^k}{dx^k}$

$$f^{(n)} = D^n f = \frac{d^n f}{dx^n}.$$

Primer. 1) $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$ je zvezna.

$$f'(x) = \sin\frac{1}{x} + x\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{h\sin\frac{1}{h} - 0}{h}$$ ne obstaja

2) $g(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$

$$g'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, x \neq 0$$

$$g'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h} - 0}{h} = 0$$

$\lim_{x\to 0} g'(x)$ ne obstaja:

g je odvedljiva na $\mathbb{R}$

g ni zvezno odv. na nobenem intervalu, ki vsebuje 0.

ROLLOV IN LAGRANGEEV IZREK

Definicija. Naj bo $S \subset \mathbb{R}$ množica in $f: S \to \mathbb{R}$ funkcija.
Pravimo, da ima f v točki $c \in S$ lokalni maksimum, če obstaja tak $\delta > 0$, da za vse $x \in S$, za katere je $|x-c|<\delta$, velja $f(x) \le f(c)$.
Podobno za lokalni min, lokalni ekstrem je skupno ime za lok. min in lok. maks.

Izrek. Naj bo funkcija $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ odvedljiva v točki $c\in(a,b)$. Če je c lokalni ekstrem od f, potem je $f'(c)=0$.

Dokaz. Denimo, da je c lokalni maksimum.
Poglejmo si sekante skozi $(c, f(c))$:
izberimo δ iz defin. lok. maks.
za x, $|x-c|<\delta$ velja $f(x)\le f(c)$.

Zato je za $x>c$: $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\le 0$

in za $x<c$: $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\ge 0$.

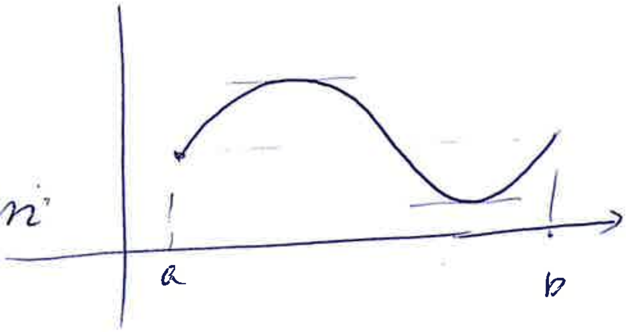
Ker je f v točki c odvedljiva, obstaja $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$.

Po eni strani mora veljati
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\searrow c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\le 0\\ \lim\limits_{x\nearrow c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = 0$$
∎

Definicija. Naj bo f odvedljiva funkcija na intervalu I. Če je $f'(c)=0$ za nek $c\in I$, potem c imenujemo **kritična točka**.

Opomba. Izrek pove, da je lokalni ekstrem dosežen v kritični točki.

Izrek (Rollov izrek). Naj bo funkcija $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ zvezna na $[a,b]$ in odvedljiva na (a,b) in $f(a)=f(b)$. Potem obstaja $c\in(a,b)$, da je $f'(c)=0$.



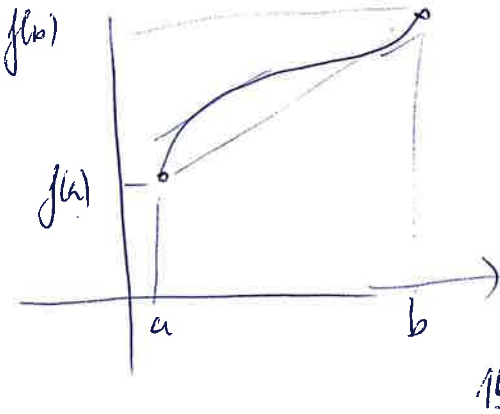
Dokaz. Ker je f zvezna na $[a,b]$, doseže minimum in maksimum. Označimo z $x_m\in[a,b]$ točko, v kateri je dosežen minimum, $x_M\in[a,b]$ točko, v kateri je dosežen max.

Če je $f(x_m)=f(x_M)$, je f konstantna in $f'\equiv 0$ na (a,b). označimo jo s c

Sicer vsaj ena od točk x_m, x_M leži na (a,b) (ker je $f(a)=f(b)$). V tej točki je dosežen tudi lokalni ekstrem, torej je je f odv. in po prejšnjem izreku $f'(c)=0$ $\boxtimes$

Lagrangev izrek. Naj $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ zvezna funkcija. Če je f odvedljiva na (a,b), potem obstaja $c\in(a,b)$, da je

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$



Dokaz. $F(x) = f(x) - f(a) + A(x-a)$

F je zvezna na $[a,b]$, odv. na (a,b), ne glede na izbiro A.

$F(a) = 0$.

Določimo tak A, da bo $F(b) = 0$:

$$f(b) - f(a) = A(b-a), \text{ tj. } A = -\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Potem F izpolnjuje pogoje Rollovega izreka, zato obstaja $c \in (a,b)$: $F'(c) = 0$

$$F'(x) = f'(x) + A \quad : \quad F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

$\boxtimes$

Opomba. Pišimo $a = x$, $b = x+h$. Potem za $c \in (a,b)$ obstaja $\vartheta \in (0,1)$: $x + \vartheta h = c$.

Za zvezno in odv. funkcijo f, $(x-\delta, x+\delta)$ v okolici točke x velja:

za vse h, $|h| < \delta$: $f(x+h) - f(x) = h f'(x + \vartheta_h h)$ za nek $\vartheta_h \in (0,1)$.

22.2

Posledica. Naj bo f odvedljiva funkcija na odp. intervalu I. Tedaj velja:

(i) $f'(x) \geq 0$ za vsak $x \in I \Leftrightarrow f$ je naraščajoča na I

(ii) $f'(x) \leq 0$ za vsak $x \in I \Leftrightarrow f$ je padajoča na I.

(iii) $f'(x) > 0$ za vsak $x \in I \Rightarrow f$ je strogo naraščajoča na I.

(iv) $f'(x) < 0$ za vsak $x \in I \Rightarrow f$ je strogo padajoča na I.

Opomba $f(x) = x^3$.

Dokaz. (i) $(\Rightarrow)$ izb. $a, b \in I$, $a < b$. Obstaja $c \in (a,b)$:

$$f(b) - f(a) = \underset{\geq 0}{f'(c)} \cdot \underset{> 0}{(b-a)} \Rightarrow f(b) \geq f(a)$$

$(\Leftarrow)$ izb. $x \in I$. Za vsak dovolj majhen $h \neq 0$, je $x+h \in I$ in velja:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \quad (\text{posebej za } h > 0, h < 0$$

torej je $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$.

K

Posledica. Či za odvedljivo funkcijo f na intervalu I velja $f'(x)=0$ za vsak $x\in I$, potem je f konstantna.

Dokaz. (i) in (ii).

Opomba. **Primer.**
$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\in(1,2) \\ 1, & x\in(3,4) \end{cases}$$

f je zvezna in odvedljiva, $f'\equiv 0$, f ni konstantna.

Posledica. Naj bo $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ zvezna funkcija, $c\in(a,b)$ in f odvedljiva na (a,c) in (c,b).

(i) Či je $f'(x)\leq 0$ za vse $x\in(a,c)$ in $f'(x)\geq 0$ za vse $x\in(c,b)$, potem ima f v c minimum.

(ii) Či je $f'(x)\geq 0$ za vse $x\in(a,c)$ in $f'(x)\leq 0$ za vse $x\in(c,b)$, potem ima f v c maksimum.

Dokaz. (i) $x\in(a,c)$

vemo: f je padajoča na (a,c).

Ker je f zvezna v c: izb. zapor. $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c$, $y_n\in(x,c)$.

Potem velja: $f(x)\geq f(y_n)$ $\forall n$

$$\Rightarrow f(x)\geq f(c).$$

Podobno na desni. ∎

Opomba. Obratno ne velja.

Posledica. Naj bo $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ odvedljiva funkcija in $c\in(a,b)$ stacionarna točka.

(i) Če obstaja $\delta>0$: $f'(x)\leq 0$ za vse $x\in(c-\delta,c)$ in $f'(x)\geq 0$ za vse $x\in(c,c+\delta)$ $\Rightarrow$ f ima v c lok. min.

(ii) Či obstaja $\delta>0$: $f'(x)\leq 0$ za vse $x\in(c-\delta,c)$ in $f'(x)\geq 0$ za vse $x\in(c,c+\delta)$ $\Rightarrow$ f ima v c lok. maks.

(iii) Či je $f'(x)>0$ za vse $x\in(c-\delta,c+\delta)\setminus\{c\}$ ali $f'(x)<0$ za vse $x\in(c-\delta,c+\delta)$ (*) potem f v c nima lok. ekstr.

Iskanje glob. ekstremov odvedljive funkcije f na $[a,b]$:

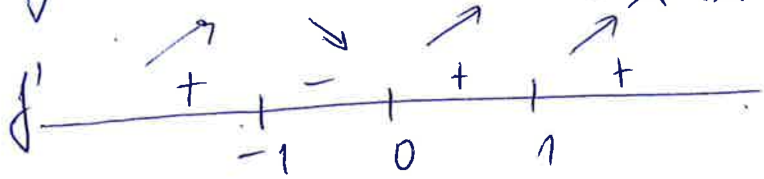
- določimo stacionarne točke $x_1,\dots,x_n$
- izračunamo vrednosti: $f(x_1),\dots,f(x_n), f(a), f(b)$
- izberemo največjo in najmanjšo.

Če funkcija f ni povsod odvedljiva, med kandidate za ekstrem dodamo še točke, v katerih funkcija ni odvedljiva.

Pri iskanju lokalnih ekstremov analiziramo predznak odvoda.

Primer. $f(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+1$. Določi lok. ekstreme! Glob. na $[-2,2]$ skupaj.

$f'(x)=x^4-x^3-x^2+x=x^3(x-1)-x(x-1)=$
$=x(x-1)^2(x+1)$ stac. t.: $-1,0,1$.



-1 je lok. maks.

0 je lok. min.

Trditev. Denimo, da je funkcija f dvakrat odvedljiva v okolici točke a in denimo, da je a stacionarna točka od f.

1) Če je $f''(x)\le 0$ za vse x v neki okolici točke a, potem ima f v a lokalni maksimum.
2) Če je $f''(x)\ge 0$ za vse x v neki okolici točke a, ima f v a lok. min.

Dokaz. $f''(x)\le 0$ na int. $I \Rightarrow f'$ je padajoča funkcija na I.
Torej je $f'(x)\ge 0$ za $x\le a$ in $f'(x)\le 0$ za $x\ge a$.
Po prejdokazanem ima f v a lok. maks.

Posledica. Naj bo f dvakrat zvezno odvedljiva funkcija v okolici točke a in $f'(a)=0$.

1) Če je $f''(a)<0$, ima f v a lokalni maksimum.

2) Če je $f''(a)>0$, ima f v a lokalni minimum.

Dokaz. Če je $f''(a)$ in je f'' zvezna, potem je $f''(x) \leq 0$ v meli okolici točke a.

Trditev. Naj bo f definirana na $[a,b]$, odvedljiva, $\overset{\text{w.}}{\lfloor}$ odvedljiva v a, b.

(i) Če je $f'(a)>0$, ima f v a lok min.

(ii) Če je $f'(a)<0$, ima f v a lok maks.

(iii) Če je $f'(b)>0$, ima f v b lok maks.

(iv) Če je $f'(b)<0$, ima f v b lok min.

KONVEKSNOST IN KONKAVNOST

Definicija. Naj bo funkcija f definirana na intervalu I. Pravimo, da je f <u>konveksna na I</u>, če za vsaka $a, b \in I$, $a < b$ velja:

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \text{ za vsak } x, a \leq x \leq b$$

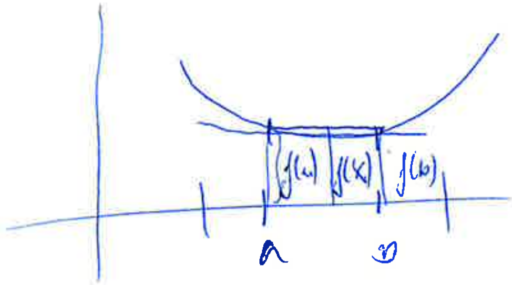
$$\iff f(x) \leq f(a)\left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right) + f(b) \cdot \left(\frac{x-a}{b-a}\right)$$

Če pišemo $t = \frac{x-a}{b-a}$, $t \in [0,1]$, dobimo:

$$x = a + t(b-a) = (1-t)a + tb$$

Za vsaka $a, b \in I$: $f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + t f(b)$ za $\forall t \in [0,1]$.

Geometrijski pomen: Graf funkcije f na $[a,b]$ leži pod sekanto skozi $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$ za vsaka $a, b \in I$



Definicija. Naj bo funkcija f definirana na I. Pravimo, da je f <u>konkavna na I</u>, če za vsaka $a, b \in I$ $a < b$ velja

$$f(x) \geq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \text{ za vsak } x \in [a,b].$$

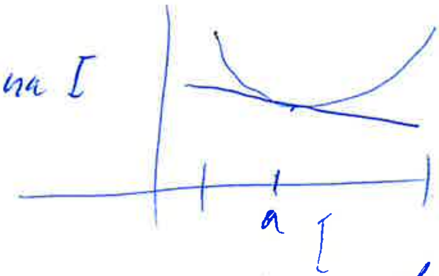
Opomba. f konveksna $\iff -f$ konkavna.

Izrek. Če je f odvedljiva funkcija na odp. intervalu I, potem je f konveksna na I natanko tedaj, kadar za vsaka $a, x \in I$ velja:

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$$

Opomba. Graf f leži nad tangento v poljubni točki $a \in I$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) denimo, da je f konveksna na I, $a, x \in I$.

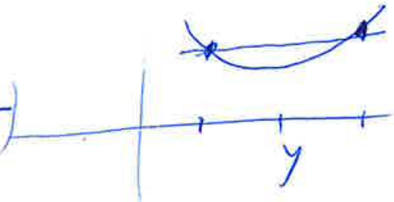


Če je $a = x$ ✓

Če $a \neq x$: potem za poljuben y med a in x velja:

$$f(y) \leq f(a) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(y-a).$$

graf leži pod sekanto



Torej $f(y) - f(a) \leq (f(x) - f(a)) \underset{\vee 0}{\frac{y-a}{x-a}}$

$$\frac{f(y)-f(a)}{y-a} \cdot (x-a) \leq f(x) - f(a) \quad \text{za vsak } y \text{ med } a \text{ in } x.$$

$$\Big\downarrow \lim_{y \to a}$$

$$f'(a)(x-a) \leq f(x) - f(a)$$

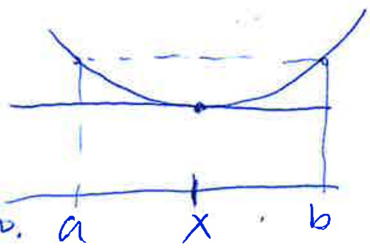
$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$$

($\Leftarrow$) denimo, da velja: $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$ za vse $x, a \in I$.

Izberimo $a, b \in I$ in x: $a < x < b$.

Potem točki $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$ ležita nad tangento na graf funkcije f v točki $(x, f(x))$.

geometrijsko sledi: daljica $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ leži nad $(x, f(x))$, tj. graf je pod sekanto.



Račun:

$$\left.\begin{aligned} f(b) &\geq f(x) + f'(x)(b-x) && / \cdot (x-a) \\ f(a) &\geq f(x) + f'(x)(a-x) && / \cdot (b-x) \end{aligned}\right\} +$$

$$f(b)(x-a) + f(a)(b-x) \geq f(x)\,(x-a+b-x)$$

$$f(x) \leq \frac{1}{b-a}\Big(f(a)(b-a) + f(a)(a-x) + f(b)(x-a)\Big)$$

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \qquad \boxtimes$$

Izrek. Naj bo f odvedljiva na intervalu I. Potem je f konveksna natanko tedaj, kadar je odvod f' naraščajoča funkcija na I.
Če je f dvakrat odvedljiva na I, je f konveksna natanko tedaj, kadar je $f''(x) \geq 0$ za vse $x \in I$.

Dokaz. (drugi del sledi iz prvega)

$(\Rightarrow)$ denimo, da je f konveksna, $a, b \in I$, $a<b$.
dokazujemo $f'(a) \leq f'(b)$.

$f(b) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)$

Ker je f konveksna, velja:

$$f(x) \leq f(a) + \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{= k}(x-a) = f(a) + k(x-a) = f(b) + k(x-b) \quad \text{za vse } x \in (a,b).$$

sledi: ker je $x-a>0$: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq k$: v limiti $x \to a$: $f'(a) \leq k$

$x-b<0$: $\frac{f(x)-f(b)}{x-b} \geq k$ v limiti $x \to b$: $f'(b) \geq k$

Torej: $f'(a) \leq k \leq f'(b) \Rightarrow f'(a) \leq f'(b)$ za vse $a,b \in I$ $\boxtimes$

$(\Leftarrow)$ Denimo, da je f' naraščajoča. Izberimo $a, x \in I$, $a<x$.
Obstaja $c \in (a,x)$: $f(x) - f(a) = f'(c)(x-a)$

Po predpostavki je $f'(a) \leq f'(c)$, zato sledi:

$$f'(c) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq f'(a).$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a).$$

Podobno za $x<a$. $\boxtimes$

<u>Definicija</u>. Naj bo funkcija f definirana na intervalu I. Če za $a \in I$ obstaja okolica, da je na eni strani f konveksna in na drugi strani f konkavna, pravimo, da ima f v a <u>prevoj</u>.

$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$

Graf: - D_f, ničle, simetrija, period, ...
- limite na robovih D_f, asimptote
- odvod, intv. naraš. in padanja, lokalni ekstremi
- če je smiselno, 2. odvod, intv. konv. in konk. ter prevoji.

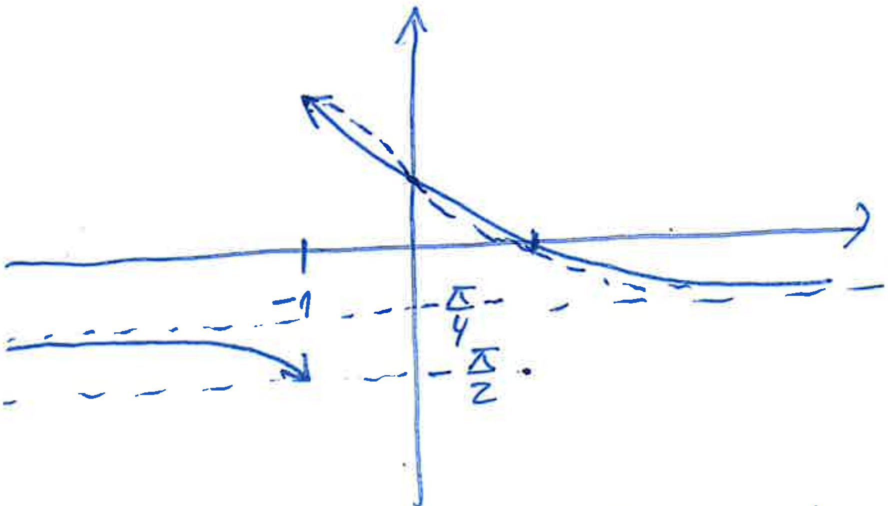
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. ničle: $x = 1$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4}$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\frac{\pi}{4}$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \underbrace{\frac{-2}{(1+x)^2 + (1-x)^2}}_{= -\frac{1}{1+x^2}} < 0$$

predznak f'



$f''(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$ f''