L' HÔPITALOVI IZREKI

G. L'Hôpital 1661-1704

Cauchyjev izrek

Lema (posplošeni Lagrangeev izrek). Naj bosta f in g zvezni funkciji na $[a,b]$, odvedljivi na (a,b) in naj velja $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$. Tedaj obstaja število $c \in (a,b)$ da velja

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

<u>Opomba</u>. Za $g(x)=x$ dobimo Lagrangeev izrek.

<u>Dokaz</u>. Ker je $g'(x)\neq 0 \ \forall x\in(a,b)$ iz Lagrangeevega izreka dobimo $g(b)-g(a)\neq 0$.

Naj bo $k := \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Definirajmo funkcijo F s predpisom

$$F(x) = (f(x)-f(a)) - k(g(x)-g(a))$$

F je zvezna na $[a,b]$ in odvedljiva na (a,b).

$$F(a) = 0 \text{ in } F(b) = 0.$$

Po Rollovem izreku obstaja $c\in(a,b)$, da je

$$F'(c) = 0.$$

$$0 = F'(c) = f'(c) - kg'(c), \text{ tj. } k = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

$\boxtimes$

Izrek 1 (L'Hôpitalovo pravilo).

Naj bosta f in g odvedljivi funkciji na (a,b) in denimo, da

(i) $g(x) \neq 0,\ g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$,

(ii) $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x \searrow a} g(x) = 0$

Če obstaja limita $B = \lim\limits_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, potem obstaja

$A = \lim\limits_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ in velja $A = B$.

Posebni primer: če sta oba prva odvoda v a definirana in zvezna in $g'(a) \neq 0 \Rightarrow A = \frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Opombe. 1) Število b ni pomembno: lahko jo poljubno blizu a.

2) Analogen rezultat velja za levo in obojestranske limite.

Dokaz. Definiramo $f(a) = g(a) = 0$.
Izberemo $x \in (a,b)$. Funkciji f in g sta zvezni na $[a,x]$ in odvedljivi na (a,x). Po izreku obstaja $c_x \in (a,x)$, da je

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

i.e. $\varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0$ $\tilde{x} \in (a, a+\delta)$: $\left|\frac{f'(\tilde{x})}{g'(\tilde{x})} - B\right| < \varepsilon$.
če je $x \in (a, a+\delta) \Rightarrow c_x \in (a, a+\delta)$ $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - B\right| < \varepsilon$. $\blacksquare$

Ko gre $x \searrow a$, gre $c_x \searrow a$, odtod izrek sledi.

IZDELAJ

Primeri: 1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{LP}{=} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = 1$.

2) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos 2x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} \overset{LP}{=}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} = 2$.

Izrek 2. Naj bosta f in g odvedljivi na (a,b), $g'(x)\neq 0$ $\forall x\in(a,b)$ in $\lim_{x\searrow a} g(x)=\infty$ (ali $-\infty$).

Či obstaja $B=\lim_{x\searrow a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, potem obstaja tudi

$A=\lim_{x\searrow a}\frac{f(x)}{g(x)}$ in velja $A=B$.

Opomba. Kot prej velja izrek tudi za leve in dvostr. limite.
Uporaba je smiselna, če je $\lim_{x\searrow a} f(x)=\infty$.

Dokaz. Denimo, da $\lim_{x\searrow a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ obstaja. Izberemo $\varepsilon>0$.

Po definiciji limite obstaja število b', $a<b'<b$, da velja

$$B-\varepsilon<\frac{f'(c)}{g'(c)}<B+\varepsilon \quad \forall c\in(a,b'].$$

Izberemo $x\in(a,b')$. Po lemi velja

$$\frac{f(x)-f(b')}{g(x)-g(b')}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ za nek } c,\ x<c<b'.$$

Odtod iz prejšnje ocene sledi:

$$(*)\qquad B-\varepsilon<\frac{f(x)-f(b')}{g(x)-g(b')}<B+\varepsilon \text{ za vse } x\in(a,b'].$$

Ker je $\lim_{x\searrow a} g(x)=\infty$, obstaja $b''\in(a,b')$, da za vsak $x\in(a,b'')$ velja:

$$g(x)>0,\ g(x)-g(b')>0.$$

Neenakost $(*)$ pomnožimo z $\frac{g(x)-g(b')}{g(x)}>0$:

$$(B-\varepsilon)\left(1-\frac{g(b')}{g(x)}\right)<\frac{f(x)-f(b')}{g(x)}<(B+\varepsilon)\left(1-\frac{g(b')}{g(x)}\right)$$

$$\frac{f(x)-f(b')}{g(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(b')}{g(x)}$$

$$\Rightarrow (B-\varepsilon)\left(1-\frac{g(b')}{g(x)}\right)+\frac{f(b')}{g(x)}<\frac{f(x)}{g(x)}<\ldots$$

$\downarrow$ $B-\varepsilon$ $\qquad\downarrow$ $B+\varepsilon$

Ko $x\searrow a$, $g(x)\to\infty$, zato $\frac{g(b')}{g(x)}\to 0$, $\frac{f(b')}{g(x)}\to 0$ in dobimo:

$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}\in(B-2\varepsilon, B+2\varepsilon)$ za $x\in(a,b'')$

$$(B-\varepsilon)\leq\underline{\lim}_{x\searrow a}\frac{f(x)}{g(x)}\leq\overline{\lim}_{x\searrow a}\frac{f(x)}{g(x)}\leq B+\varepsilon.$$

Ker je to res za $\forall\varepsilon>0$, $\lim_{x\searrow a}\frac{f(x)}{g(x)}$ obstaja in je enaka B. $\blacksquare$

Primeri: 1) $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{\log x}{\operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{2})} \overset{\frac{-\infty}{-\infty}}{\underset{LP}{=}} \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\cos^2(x-\frac{\pi}{2})}} = \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{\cos^2(x-\frac{\pi}{2})}{x} =$

$= \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot x = 0.$

2) $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}}{1}$ se zakomplicira.

$\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{LP}{=}} \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})} = 0$

Podobno: $\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^p} \xrightarrow[x \searrow 0]{} 0$ za vsak $p \in \mathbb{R}$.

tj. $e^{-\frac{1}{x}}$ pada proti 0 hitreje kot vsaka potenca x^p.

Kdaj lahko uporabimo L'Hôpitalovo pravilo?

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, ci so izpolnjeni pogoji izreka.

$0 \cdot \infty$: preoblikujemo v ulomek:

$\lim\limits_{x \searrow 0} x \log x = \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{-\infty}{\infty}}{\underset{LP}{=}} \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \searrow 0} (-x) = 0.$

✓ 23.2.2015

Posledica. Naj bosta f in g odvedljivi funkciji na (A,∞), $g(x)\neq 0$ in $g'(x)\neq 0$ za vsak $x\in(A,\infty)$. Naj bo $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ in $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$. Če obstaja $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, potem obstaja $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ in sta enaki.

Dokaz.

Predpostavimo lahko, da je $A>0$.

Naj bo $F(t)=f(1/t)$ in $G(t)=g(1/t)$ in $t\in(0,1/A)$.

Tedaj sta F in G odvedljivi na $(0,1/A)$.

$$\frac{F'(t)}{G'(t)}=\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} \quad \text{in} \quad \frac{F(t)}{G(t)}=\frac{f(1/t)}{g(1/t)}.$$

Ker $t\to 0 \Leftrightarrow 1/t\to\infty$, posledica sledi iz izreka 1.

Podobno velja za izrek 2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$$

UPORABA ODVODA V GEOMETRIJI

PODAJANJE KRIVULJ

V kartezičnih koordinatah:

1) <u>Eksplicitno</u>: Krivulja K je dana kot graf funkcije $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, torej
$$K=\Gamma_f=\{(x,f(x));\ x\in[a,b]\}.$$

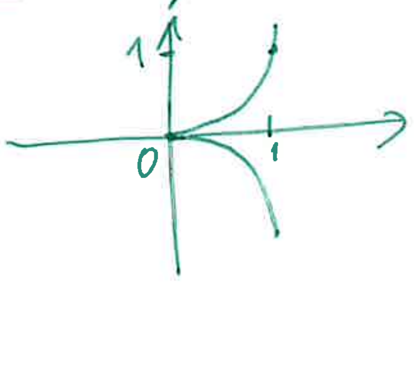
2) <u>Implicitno</u>: Krivulja K je dana kot množica rešitev enačbe $g(x,y)=0$, kjer je $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dana funkcija.
$$K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ g(x,y)=0\}.$$

3) <u>Parametrično</u>: Krivulja K je dana kot množica točk (x,y), ki so določene z $x=\alpha(t)$, $y=\beta(t)$, kjer sta $\alpha,\beta:[t_0,t_1]\to\mathbb{R}$ dani funkciji.
$$K=\{(\alpha(t),\beta(t));\ t\in[t_0,t_1]\}.$$

$t\mapsto(\alpha(t),\beta(t))=:F(t)$ je <u>vektorska funkcija</u>.

Implicitni način je bolj splošen od eksplicitnega (podamo lahko več krivulj), parametrični je bolj splošen od implicitnega (v vsakem času t, podamo lego točke na krivulji $(x(t),y(t))$

<u>Primer</u>. 1) $y^2=x^3$: implicitno podana krivulja
ni graf nad abscisno osjo
(je pa graf nad ordinatno osjo).



parametrično: $x=t^2$
$y=t^3$

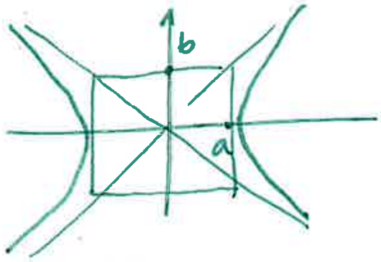
Primer 2). krožnica s središčem v $(0,0)$ in polmerom 1.

implicitno: $x^2+y^2=a^2$ (ni graf, zato je ne moremo podati eksplicitno).

parametrično: $$x = a\cos t,\quad y = a\sin t,\quad t\in[0,2\pi]$$

3) elipsa: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$: $x_{(t)}=a\cos t$, $y_{(t)}=b\sin t$, $t\in[0,2\pi]$.

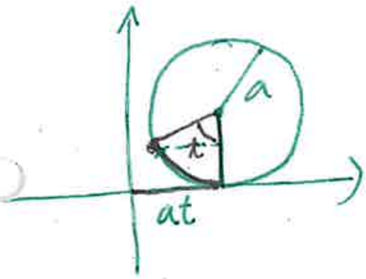
4) hiperbola: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$:



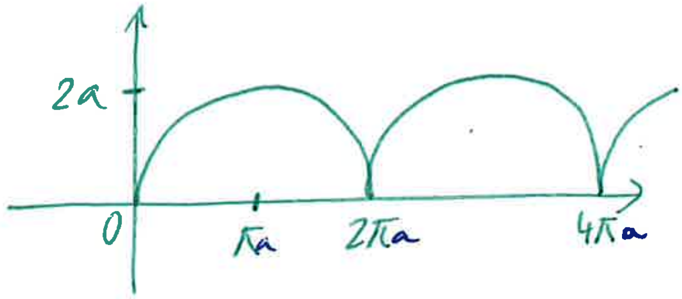
$x_{(t)}=a\,\mathrm{ch}\,t$, $y_{(t)}=a\,\mathrm{sh}\,t$, $t\in(-\infty,\infty)$. ← desna veja

$x=-a\,\mathrm{ch}\,t$, $y=a\,\mathrm{sh}\,t$ ← leva veja

5) cikloida: valj kotalimo po ravni podlagi.
K je krivulja, ki jo opiše točka na plašču valja.

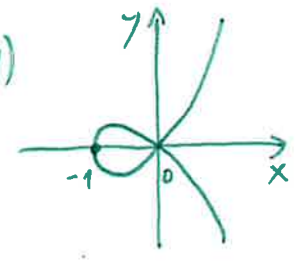


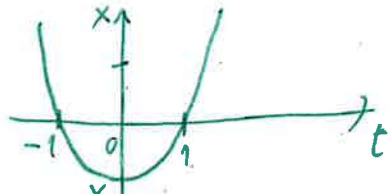
$$x(t)=at-a\sin t=a(t-\sin t)$$
$$y(t)=a-a\cos t=a(1-\cos t)$$

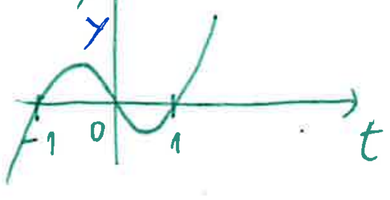


6) Nariši krivuljo, ki je podana z

$$x(t)=t^2-1,\quad y(t)=t^3-t=t(t-1)(t+1),\quad t\in\mathbb{R}$$







V polarnih koordinatah

Krivulja K je dana kot množica točk s polarnima koordinatama (r, φ), kjer je $r = h(\varphi)$ za neko funkcijo $h: [\varphi_0, \varphi_1] \to \mathbb{R}$:

$$K = \{(h(\varphi)\cos\varphi, h(\varphi)\sin\varphi); \varphi \in [\varphi_0, \varphi_1]\}.$$

Primer. ⓐ $r = 1$, ⓑ $\varphi = \frac{\pi}{4}$

$r = k\varphi$ Arhimedova spirala

 $k > 0$  $k < 0$

Definicija. Pot v ravnini je preslikava $F = (\alpha, \beta): I \to \mathbb{R}^2$, kjer je I interval v $\mathbb{R}$, α in β pa zvezni funkciji na I.

Tir (sled) poti je množica

$C = F(I) = \{F(t); t \in I\}$. F je parametrizacija krivulje C.

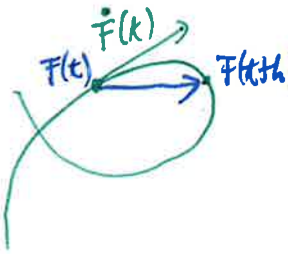
Isto krivuljo lahko dobimo z različnimi parametrizacijami. (Po isti poti se premikamo z različno hitrostjo).

Opomba. Preslikava F je zvezna $\Leftrightarrow$ α, β sta zvezni.

Definicija. Pot $F: I \to \mathbb{R}^2$ je odvedljiva, če sta komponenti α, β odvedljivi na I. Pot F je razreda C^1 (zvezno odvedljiva, zvezno diferenciabilna), če sta α in β zvezno odvedljivi na I.

V tem primeru:

$$\dot{F}(t) := F'(t) = (\alpha'(t), \beta'(t)) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (\overbrace{F(t+h) - F(t)}^{\text{vektor}})$$



$\dot{F}(t)$ se imenuje tangentni vektor poti F v točki $F(t)$, tudi hitrostni vektor.

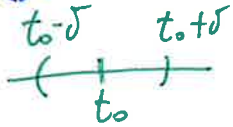
Izrek. Naj bo $F: I \to \mathbb{R}^2$ zvezno odvedljiva pot, $t_0 \in I$ in $\dot F(t_0) \neq 0$. Denimo, da je $\dot\alpha(t_0)\neq 0$. Potem obstaja tak $\delta>0$, da lahko krivuljo

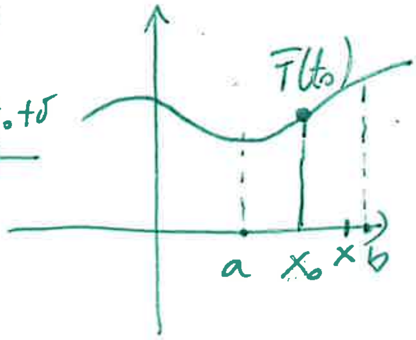
$$K=\{F(t);\ |t-t_0|<\delta\}$$

zapišemo kot graf neke odvedljive funkcije $y=f(x)$ nad intervalom U okrog točke $x_0=\alpha(t_0)$:

$$C=\{(x,f(x));\ x\in U\}.$$

Velja: $f'(\alpha(t)) = \frac{\dot\beta(t)}{\dot\alpha(t)}$ za $|t-t_0|<\delta$.





Dokaz. Denimo, da je $\dot\alpha(t_0)>0$.
Potem je α v neki okolici t_0 strogo naraščajoča, zato za nek $\delta>0$ preslika interval $(t_0-\delta,t_0+\delta)$ bijektivno na interval $U=(\alpha(t_0-\delta),\alpha(t_0+\delta))=(a,b)\subset\mathbb{R}$.
Obstaja inverzna preslikava $t=\delta(x)$, $x\in U$, da je

$$\alpha(t)=\alpha(\delta(x))=x\ ,\ x\in U.$$

Definiramo $f(x)=\beta(\delta(x))$, $x\in U$.
Tedaj velja: $(x,f(x))=(\alpha(t),\beta(t))$ za $t=\delta(x)$.
Ker je $\delta=\alpha^{-1}$ odvedljiva, je f odvedljiva.
Ker je $f(\alpha(t))=\beta(t)$, je $f'(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)=\beta'(t)$. ■

tang. vektor: $(1,f'(x)) = (1,\frac{\dot\beta}{\dot\alpha})$

Opomba. Če je $\dot\beta(t_0)\neq0$, potem je K lokalno graf nad y osjo.

Posledica. Naj bosta α in β dvakrat odvedljivi na (t_0,t_1) in denimo, da je $\dot\alpha(t)\neq0$ za $t\in(t_0,t_1)$. Potem je funkcija f iz izreka dvakrat odvedljiva in velja:

$$f''(\alpha(t))=\frac{\dot\alpha(t)\ddot\beta(t)-\ddot\alpha(t)\dot\beta(t)}{(\dot\alpha(t))^3}$$

Dokaz. Vemo: $f'(\alpha(t))=\frac{\dot\beta(t)}{\dot\alpha(t)}\ \forall t$. Odvajamo:

$$f''(\alpha(t))\dot\alpha(t)=\frac{\ddot\beta(t)\dot\alpha(t)-\dot\beta(t)\ddot\alpha(t)}{\dot\alpha(t)^2}$$ ■

Definicija. Naj bo $F: I \to \mathbb{R}^2$ odvedljiva pot.

Če je $\dot{F}(t)=0$, je $t \in I$ kritična točka preslikave F.

Če je $\dot{F}(t)\neq 0$, $t\in I$ regularna točka preslikave F.

Če so vse točke $t \in I$ regularne točke, je F regularna parametrizacija. Tir regularne parametrizacije je gladka krivulja.

Enačba tangente na tir poti F:

Če je t regularna točka, je $\dot{F}(t)$ smerni vektor tangente skozi $F(t)$, njena enačba:

vektorska $\quad s \longmapsto F(t) + s\dot{F}(t)$

parametrična enačba tangente:

$$x = \alpha(t) + s\dot{\alpha}(t)$$
$$y = \beta(t) + s\dot{\beta}(t) \qquad s \in \mathbb{R}.$$

eliminiramo s in dobimo implicitno obliko enačbe tangente

$$\boxed{(x-\alpha(t))\dot{\beta}(t) = (y-\beta(t))\dot{\alpha}(t)}$$ oziroma segmentno (odsekovno)

$$\frac{x-\alpha(t)}{\dot{\alpha}(t)} = \frac{y-\beta(t)}{\dot{\beta}(t)}.$$

Enačba normale

smerni vektor: $(-\dot{\beta}(t), \dot{\alpha}(t))$; dobimo

$$\frac{x-\alpha(t)}{-\dot{\beta}(t)} = \frac{y-\beta(t)}{\dot{\alpha}(t)}$$ oziroma

$$\boxed{(x-\alpha(t))\dot{\alpha}(t) + (y-\beta(t))\dot{\beta}(t)=0}$$

Primeri: 1) krožnica: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$

$\dot{x} = -a\sin t$, $\dot{y} = a\cos t$

Enačba tangente: $\dfrac{x-a\cos t}{-a\sin t} = \dfrac{y-a\sin t}{a\cos t}$

$(x-a\cos t)a\cos t = (y-a\sin t)(-a\sin t)$

$x\cos t + y\sin t = a$

Tangenta je odvisna samo od tira poti in ni odvisna od izbire regularne parametrizacije.

po izreku: če je $F: I \to \mathbb{R}^2$ zv. odv. pot in $F=(\alpha, \beta)$, $\dot{\alpha}(t_0) \neq 0$: Potem obstaja $\delta > 0$, da je

$$K = \{F(t);\ |t-t_0| < \delta\} = \{(x, f(x));\ x \in U\},$$

kjer je U okolica točke $x_0 = \alpha(t_0)$.

Tangenta na K v točki $(\alpha(t_0), \beta(t_0))$ ima smerni vektor $(1, f'(x_0))$, ki ni odvisen od izbire parametrizacije.

<u>Opomba</u>. V kritičnih točkah ni nujno, da bi imela odvedljiva pot tangento:

1) $$\alpha(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t^2, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\beta(t) = \begin{cases} t^2, & t \leq 0 \\ 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

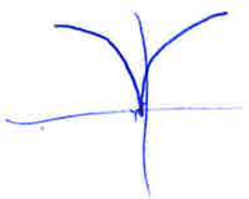
(α, β) je zv. odv. pot.

Tir poti

2) $\alpha(t) = t^3$

$\beta(t) = t^2$

$y = \sqrt[3]{x^2}$



3) $\alpha(t) = t^3$

$\beta(t) = t^3$