INTEGRAL

PRIMITIVNA FUNKCIJA IN NEDOLOČENI INTEGRAL

Motivacija: Vsaka odvedljiva funkcija f na množici I določa funkcijo f' na I.
Denimo, da poznamo f'. Kako dobimo f?
Ali je vsaka funkcija g odvod neke funkcije?

Definicija. Naj bo funkcija f definirana na množici $I \subset \mathbb{R}$. Če obstaja odvedljiva funkcija $F: I \to \mathbb{R}$, za katero velja $F' = f$ na I, jo imenujemo primitivna funkcija funkcije f na I.

Opomba. 1) Če je F primitivna funkcija od f na množici I, potem je za vsak $C \in \mathbb{R}$ tudi funkcija

$$G(x) = F(x) + C \ , \quad x \in I$$

primitivna funkcija od f.

2) Naj bosta F in G primitivni funkciji od f na intervalu I. Potem obstaja $C \in \mathbb{R}$, da velja:

$$G(x) = F(x) + C \text{ za vsak } x \in I.$$

Dokaz. Če imata funkciji F in G na intervalu enak odvod, se razlikujeta kvečjemu za konstanto.

Definicija. Nedoločeni integral funkcije f je skupek vseh njenih primitivnih funkcij. Označimo ga z $\int f(x)\,dx$. Funkcijo f imenujemo integrand.

Trditev. Naj bo F primitivna funkcija od funkcije f na intervalu I. Potem velja

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

kjer je $C \in \mathbb{R}$.

Opomba. Če je F primitivna funkcija od f, potem velja:

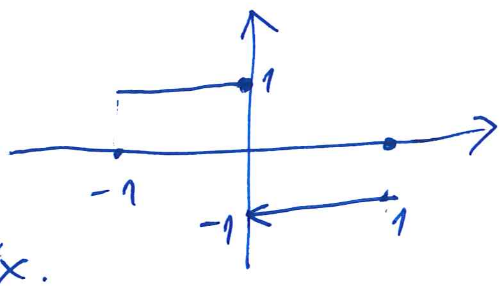
$$dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$$

Primitivna funkcija od f je torej tista funkcija, katere diferencial je $f(x)dx$. Integriranje je torej nasprotna operacija diferenciranju.

Primer. 1) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$, ker je $(\sin x)' = \cos x$.

2) Naj bo $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x \le 0 \\ -1, & 0 < x \quad 1 \end{cases}$

f nima primitivne funkcije



Denimo, da je F primitivna funkcija od f: $F'(x) = f(x)$ za $\forall x$. Izberimo $a \in (0,1)$. Ker je F odvedljiva na $(-1,1)$, je F na $[-a,a]$ zvezna in zato F na $[-a,a]$ doseže ekstrema. Ker je $F'(-a) = f'(-a) = 1$, F v $-a$ narašča, zato v $-a$ nima maksima. Ker je $F'(a) = f(a) = -1$, F v a pada, zato v a nima maksima. Torej je maksimum dosežen v notranji točki c intervala $[-a,a]$, zato velja

$$F'(c) = f(c) = 0 \quad -\!\!\times\!\!- .$$

Opomba. Funkcija f ni zvezna.

V nadaljevanju bomo dokazali, da ima vsaka zvezna funkcija na $[a,b]$ primitivno funkcijo.

PRAVILA ZA INTEGRIRANJE

Trditev. Naj bosta f in g taki funkciji na intervalu I, ki imata primitivni funkciji in $\lambda \in \mathbb{R}$. Potem velja:

1) $$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,$$
$$\int (f(x)-g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx.$$

2) $$\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx.$$

3) Če je F odvedljiva na I, potem velja:
$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C.$$

Dokaz. Naj bo F primitivna funkcija od f in G primitivna funkcija od g na I.

Potem velja: $\quad (F(x)+G(x))' = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x).$

Zato je $F+G$ primitivna funkcija od $f+g$ in velja 1).

Trditev. Naj bo funkcija g odvedljiva na intervalu I in naj ima funkcija f primitivno funkcijo F na intervalu $g(I)=\{g(x);\ x\in I\}$. Potem je $F\circ g$ primitivna funkcija od $(f\circ g)\cdot g'$ na I, torej velja:
$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + C.$$

Opomba. $t=g(x)$ je nova spremenljivka:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt = F(t)+C = F(g(x))+C$$

$$t=g(x)$$
$$dt=g'(x)dx$$

Dokaz. $(F\circ g)'(x) = F'(g(x))\cdot g'(x) = f(g(x))\cdot g'(x)$. $\boxtimes$

Primer. $\int e^{2x+1}dx = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{2x+1}+C.$

$$t=g(x)=2x+1$$
$$dt = 2dx$$
$$dx = \frac{1}{2}dt$$

Trditev. (integriranje po delih – per partes).
Naj bosta f in g odvedljivi funkciji na intervalu I.
Potem velja:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Če označimo $u=f(x)$, $v=g(x)$, lahko krajše zapišemo:

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\cdot du$$

Dokaz. $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)g'(x)$.
Torej je $f\cdot g$ primitivna funkcija od $f'\cdot g + f\cdot g'$ na I in velja:

$$\int (f'(x)g(x) + f(x)\cdot g'(x))dx = f(x)\cdot g(x) + C.$$

$\boxtimes$

Primer. 1) $\int \ln x\, dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = \underline{\underline{x\ln x - x + C}}$

$u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = x$

2) $\int x \sin x\, dx = -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \sin x + C$

$u = x \qquad dv = \sin x\, dx$

$du = dx \qquad v = -\cos x$

TABELA OSNOVNIH INTEGRALOV

funkcija	primitivna funkcija
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$
a^x	$\frac{1}{\ln a} a^x$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\operatorname{arctg} x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}$	$\ln(x+\sqrt{x^2 \pm 1})$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$