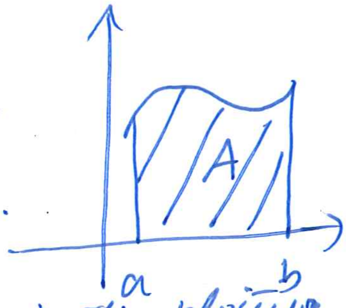
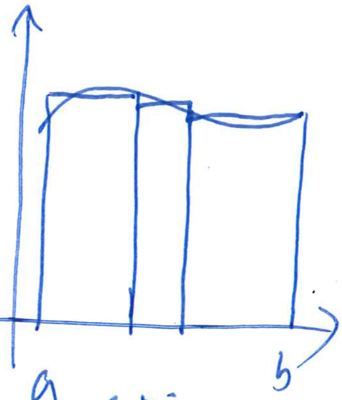
DOLOČENI INTEGRAL

Naj bo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ nenegativna funkcija. Potem graf funkcije f omejuje območje $A\subset\mathbb{R}^2$ nad intervalom $[a,b]$.

(tj. A je navzgor omejena z Γ_f, navzdol z abscisno osjo, na levi s premico $x=a$ in na desni z $x=b$.



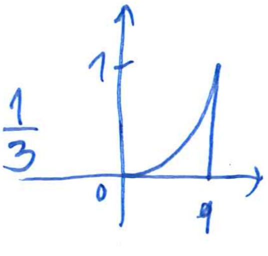
Če je f konstanta, znamo izračunati ploščino.
(pa še v nekaterih enostavnih primerih).
V splošnem: interval $[a,b]$ razdelimo na podintervale in na vsakem funkcijo f zamenjamo s primerno konstanto.



- ne vemo, kako dobro smo aproksimirali;
- če namesto tega vzamemo $\inf f$ in $\sup f$ na podintervalu, dobimo zgornjo oziroma sp. mejo za ploščino.

Primer. $f(x)=x^2$: Izračunaj ploščino pod grafom f na $[0,1]$!

$$P_m = \frac{1}{n}\left(0+\frac{1}{n^2}+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\dots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right) =$$
$$= \frac{1+2^2+\dots+(n-1)^2}{n^3} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} \to \frac{1}{3}$$



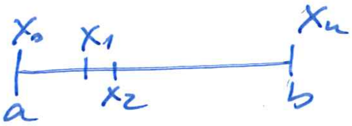
$$P_M = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2}+\dots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right) =$$
$$= \frac{1+2^2+\dots+n^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \to \frac{1}{3}$$

$$1^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

RIEMANNOVA VSOTA IN R. INTEGRAL

Riemann 1826–1866

<u>Definicija</u>. <u>Delitev D intervala [a, b]</u> je dana z izbiro $\{x_0, \dots, x_n\}$ <u>delilnih točk</u> x_i:



$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b,$$

kjer je $n \in \mathbb{N}$. Dolžino i-tega podintervala $[x_{i-1}, x_i]$ označimo z $\delta_i = x_i - x_{i-1}$. <u>Velikost delitve D</u> je dolžina najdaljšega podintervala v delitvi D:

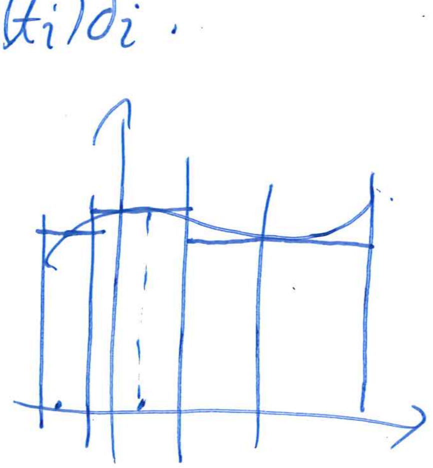
$$\delta(D) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \delta_i$$

Na vsakem podintervalu izberemo <u>testno točko</u> $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ in označimo $T_D = (t_1, \dots, t_n)$ nabor testnih točk. Pravimo, da je nabor testnih točk T_D <u>usklajen</u> z delitvijo D, ker smo na vsakem podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$ določenim z D, izbrali natanko eno točko t_i.

<u>Riemannova vsota</u> funkcije $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ pridružena delitvi D in neki usklajeni izbiri testnih točk T_D, je

$$R(f, D, T_D) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\delta_i .$$

Pričakujemo, da se natančnost poveča, ko pošljemo $\delta \to 0$. Rezultat ne sme biti odvisen od izbire D in T_D.



Definicija. Riemannov integral ali določeni integral funkcije $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je limita Riemannovih vsot, kjer limito vzamemo po vseh delitvah D intervala $[a,b]$ in po vseh ustreznih izbirah delilnih točk T_D, ko gre velikost delitev $\delta(D)$ proti 0, če ta limita obstaja.

Pišemo: $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{D,T_D\\ \delta(D)\to 0}} R(f,D,T_D).$$

Torej: $I = \lim_{\substack{D,T_D\\ \delta(D)\to 0}} R(f,D,T_D)$ pomeni:

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ za poljubno tako delitev D, da je $\delta(D)<\delta$ in za poljubno ustrezno izbiro testnih točk T_D velja

$$|R(f,D,T_D) - I| < \varepsilon.$$

Če Riemannov integral f na $[a,b]$ obstaja, pravimo, da je f na $[a,b]$ Riemannovo integrabilna.

> **Primer.** Konstantna funkcija $f(x)=c$, $c\in\mathbb{R}$ je integrabilna na $[a,b]$ in velja $\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$.

Trditev. Če je funkcija f na $[a,b]$ Riemannovo integrabilna, potem je f omejena.

Dokaz. Denimo, da je f na $[a,b]$ integrabilna, pa ni navzgor omejena. Po definiciji integrala obstaja I in $\delta>0$, da za vsako delitev D, $\delta(D)<\delta$ in vsako ustrezno izbiro T_D velja: $|I - R(f,D,T_D)| < 1 \Rightarrow |R(f,D,T_D)| < |I|+1$. (Izberimo neko delitev D), $\delta(D)<\delta$. Obstaja podinterval $[x_{i-1},x_i]$, na katerem je f neomejena. Za $\forall k\in\mathbb{N}\ \exists c_k\in[x_{i-1},x_i]: f(c_k)>k$

$$R(f,D,T_{D_k}) = \sum_{j\neq i} f(t_j)\delta_j + f(c_k)\delta_i \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty \quad \nrightarrow$$

Opomba. Ni vsaka omejena funkcija integrabilna.

Primer omejene funkcije, ki ni integrabilna, je

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{na } [0,1].$$

Izberimo poljubno delitev D. Če za testne točke izberemo racionalna števila, je $R(f, D, \xi) = 1$, če pa izberemo iracionalna števila, je $R(f, D, \xi) = 0$, ne glede na velikost delitve. Torej f ni integrabilna na $[0, 1]$.

DARBOUXOVE VSOTE (Darboux 1842–1917)

Naj bo f omejena funkcija na $[a,b]$. (v celotnem razdelku)

$m := \inf\{f(x); x\in[a,b]\}$, $M = \sup\{f(x); x\in[a,b]\}$.

Naj bo D delitev z delilnimi točkami x_i. Označimo

$$m_k = \inf\{f(x); x\in[x_{k-1},x_k]\}$$
$$M_k = \sup\{f(x); x\in[x_{k-1},x_k]\}. \qquad 1\le k\le n.$$

Velja: $m \le m_k \le M_k \le M \quad \forall k$.

Definicija. Število $s(D)=\sum_{k=1}^{n} m_k\delta_k$ imenujemo spodnja Darbouxova vsota pripadajoča delitvi D, število $S(D)=\sum_{k=1}^{n} M_k\delta_k$ imenujemo zgornja Darbouxova vsota pripadajoča delitvi D.

Velja: $m(b-a)\le s(D)\le S(D)\le M(b-a)$, še več

$s(D)\le R(f,D,T_D)\le S(D)$ za vsako možno delitev T_D.

↓ 9.3.2015

Definicija. Pravimo, da je delitev D' finejša od delitve D, če vsebuje vse delilne točke od D, tj. $D\subset D'$!

Trditev1. Naj bo delitev D' finejša od delitve D. Tedaj velja

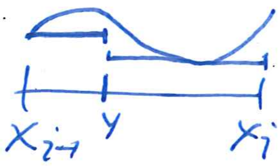
$s(D)\le s(D')$ in $S(D')\le S(D)$.

Dokaz. Od D do D' pridemo z dodajanjem ene točke naenkrat, zato privzamemo, da je $D'=D\cup\{y\}$ in $y\in(x_{i-1},x_i)$ za nek i.

y razdeli $[x_{i-1}, x_i]$ na intervala $[x_{i-1}, y]$ in $[y, x_i]$.

$m_i' = \inf\{f(x); x \in [x_{i-1}, y]\}$,

$m_i'' = \inf\{f(x); x \in [y, x_i]\}$.



Velja: $m_i \leq m_i'$ in $m_i \leq m_i''$

$$s(D) = \sum_{j \neq i} m_j \delta_j + m_i \delta_i \leq \sum_{j \neq i} m_j \delta_j + m_i'(y - x_{i-1}) + m_i''(x_i - y) = s(D').$$

Podobno za $S(D)$ $\boxtimes$

Trditev 2. Naj bosta D_1 in D_2 poljubni delitvi intervala $[a,b]$.

Velja: $s(D_1) \leq S(D_2)$.

(tj. poljubna spodnja Darbouxova vsota je manjša od poljubne zgornje Darbouxove vsote).

Dokaz. $D_1 \cup D_2$ je finejša od D_1 in D_2, zato po prejšnji trditvi velja

$$s(D_1) \leq s(D_1 \cup D_2) \leq S(D_1 \cup D_2) \leq s(D_2). \boxtimes$$

Množica spodnjih D. vsot je torej navzgor omejena (z $M(b-a)$), množica zg. D. vsot pa je navzdol omejena (z $m(b-a)$).

Zato obstajata $s = \sup\{s(D); D \text{ delitev}\}$
$S = \inf\{S(D); D \text{ delitev}\}$ in po trd. 2 velja

$$s \leq S.$$

Definicija. Naj bo f omejena funkcija na $[a,b]$. Pravimo, da je f Darbouxovo integrabilna, če je $s = S$. Število s imenujemo Darbouxov integral funkcije f na $[a,b]$.

Opomba. Dokazali bomo: f je D-integr. $\Leftrightarrow$ f je R-integr.

Trditev 3. Omejena funkcija f na $[a,b]$ je D-integr. $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ obstaja delitev D, da je $S(D) - s(D) < \varepsilon$.

Dokaz. ($\Leftarrow$) Izb. $\varepsilon > 0$. Obstaja D: $S(D) - s(D) < \varepsilon$.

Ker je $s(D) \leq s \leq S \leq S(D)$, velja $\varepsilon > S(D) - s(D) \geq S - s$.

Torej $0 \leq S - s < \varepsilon$ za vsak $\varepsilon > 0 \Rightarrow S = s$. ■

($\Rightarrow$) Denimo, da je f Darbouxovo integrabilna: $S = s = I$

Tedaj za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ delitev D_1: $I - s(D_1) < \frac{1}{2}\varepsilon$.

$\exists$ delitev D_2: $S(D_2) - I < \frac{1}{2}\varepsilon$.

$D = D_1 \cup D_2$:

$$S(D) - s(D) \leq S(D_2) - s(D_1) < \varepsilon. \quad ■$$

$S(D) \leq S(D_2)$

$s(D) \geq s(D_1)$

Izrek 4. Vsaka zvezna funkcija na $[a,b]$ je Darbouxovo integrabilna.

Dokaz. Naj bo f zvezna na $[a,b]$. Potem je f na $[a,b]$ enakom. zv. in omejena. Izb. polj. $\varepsilon > 0$. Obstaja $\delta > 0$:

za $x, x' \in [a,b]$ velja: če je $|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon/(b-a)$

Naj bo D poljubna delitev, za katero velja $\delta(D) < \delta$.

Če $x, x' \in [x_{k-1}, x_k]$, potem $|f(x) - f(x')| < \varepsilon/(b-a)$.

Torej $M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$ (min in max sta dosežena).

Dobimo: $S(D) - s(D) = \sum_k M_k \delta_k - \sum m_k \delta_k =$

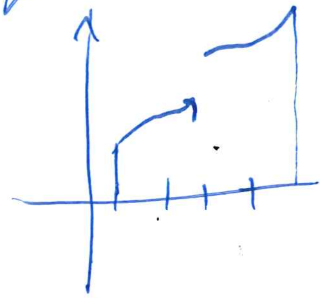
$$= \sum_k (M_k - m_k)\delta_k \leq \sum \frac{\varepsilon}{b-a}\delta_k = \varepsilon$$

■

Opomba. Podoben dokaz pokaže tudi:
Če je f omejena na $[a,b]$ in zvezna na (a,b), potem je f Darbouxovo integrabilna na $[a,b]$.

Izrek 5. Vsaka monotona funkcija na $[a,b]$ je Darbouxovo integr.

Dokaz. Denimo, da je f naraščajoča na $[a,b]$.
Izberimo poljubno delitev D in izračunajmo



$$S(D)-s(D)=\sum_{k=1}^{n} M_k\delta_k-\sum_{k=1}^{n} m_k\delta_k=$$

$$=\sum_k f(x_k)\delta_k-\sum_k f(x_{k-1})\delta_k=$$

$$=\sum_k \left(f(x_k)-f(x_{k-1})\right)\delta_k\leq\sum_k\left(f(x_k)-f(x_{k-1})\right)\delta(D)=$$

$$=\delta(D)\left(f(x_1)-f(x_0)+f(x_2)-f(x_1)+\dots+f(x_n)-f(x_{n-1})\right)=$$

$$=\delta(D)\left(f(b)-f(a)\right).$$

Če je $\delta(D)$ dovolj majhen, je $S(D)-s(D)<\varepsilon$.

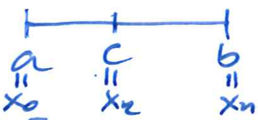
$$\delta(D)<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}.$$

$\boxtimes$

Izrek 6 (aditivnost domene). Naj bo f omejena na $[a,b]$ in $c\in(a,b)$.
f je Darbouxovo integrabilna na $[a,b]$ $\Longleftrightarrow$ f je integr. na $[a,c]$ in $[c,b]$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Izb. $\varepsilon>0$. Obstaja delitev D: $S(D)-s(D)<\varepsilon$.
Če c ni delilna točka D, jo dodamo: $\tilde{D}=D\cup\{c\}$.
Po trditvi 1 velja: $S(\tilde{D})-s(\tilde{D})\leq S(D)-s(D)<\varepsilon$.

$\tilde{D}=\{x_0,\dots,x_k,\dots,x_n\}$.



$D_1=\{x_0,\dots,x_k\}$, $D_2=\{x_k,\dots,x_n\}$ sta delitvi $[a,c]$ oz. $[c,b]$

$$S(\tilde{D})-s(\tilde{D})=S(D_1)+S(D_2)-s(D_1)-s(D_2)=\underbrace{S(D_1)-s(D_1)}_{\geq 0}+\underbrace{S(D_2)-s(D_2)}_{\geq 0}<\varepsilon$$

$\Rightarrow S(D_1)-s(D_1)<\varepsilon$ in $S(D_2)-s(D_2)<\varepsilon$

($\Leftarrow$) Izberimo delitvi D_1 in D_2 intervalov $[a,c]$ in $[c,b]$, za kateri je $S(D_1)-s(D_1)<\varepsilon/2$ in $S(D_2)-s(D_2)<\varepsilon/2$.
Potem je $D=D_1\cup D_2$ delitev $[a,b]$ in velja:

$$S(D)-s(D)<\varepsilon.$$

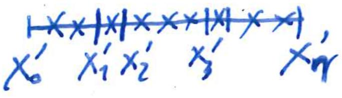
$\boxtimes$

<u>Posledica</u>. Naj bo f omejena na $[a,b]$ in naj obstajajo $a=c_0<\dots<c_r=b$, da je f zvezna na podintervalu (c_{i-1},c_i) za vse $i=1,\dots,r$.
Tedaj je f Darbouxovo integrabilna na $[a,b]$.

<u>Posledica</u>. Vsaka odsekoma zv. funkcija na $[a,b]$ je integr.: zvezna povsod razen v končno mnogo točkah, kjer ima skoke.

<u>Trditev</u>. Naj bo f Darbouxovo integrabilna na $[a,b]$.
Potem za vsak $\varepsilon>0$ obstaja $\delta>0$, da za vsako delitev D, za katero je $\delta(D)<\delta$ velja: $S(D)-s(D)<\varepsilon$.

<u>Dokaz</u>. Če je $M=m$, ni kaj dokazovati.
Če je $M\neq m$: izberimo polj. $\varepsilon>0$. Obstaja delitev D_0, da je $S(D_0)-s(D_0)<\varepsilon/2$.



Označimo $D_0=\{x_0',\dots,x_r'\}$.

$\delta := \dfrac{\varepsilon}{2r(M-m)}$ in vzemimo polj. delitev D, da je $\delta(D)<\delta$.

kot vsota dveh členov

$$S(D)-s(D)=\sum_k (M_k-m_k)\delta_k = \Sigma' + \Sigma''$$

po tistih členih delitve D, ki ne vsebujejo nobene točke x_i' v svoji notranjosti.

V Σ'' je kvečjemu r členov, vsi so $\le (M-m)\delta=\varepsilon/2r$, zato je $\Sigma''\le\varepsilon/2$.
$D_0\cup D$ je finejša od D_0, zato je $S(D_0\cup D)-s(D_0\cup D)<\varepsilon/2$.
Po drugi strani pa so vsi členi vsote Σ' zajeti v $S(D_0\cup D)-s(D_0\cup D)$, torej je

$$\Sigma'<S(D_0\cup D)-s(D_0\cup D)<\varepsilon/2$$

$\boxtimes$

Izrek. Naj bo f omejena funkcija na $[a,b]$.
Tedaj je f Riemannovo integrabilna $\Leftrightarrow$ f je Darbouxovo integrabilna. V tem primeru sta integrala enaka.

Dokaz. ($\Rightarrow$) denimo, da je f R. intgb. in je I njen integral.

Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsako delitev D, da je $\delta(D) < \delta$ velja $\left|\sum f(t_k)\delta_k - I\right| < \varepsilon$ za vsako izbiro testnih točk T_D.

Ideja: če izberemo t_k: $f(t_k) \approx M_k$, potem $S(D) \approx I$

— " — t_k: $f(t_k) \approx m_k$, potem $s(D) \approx I$

Izvedba: naj bo D delitev, da je $\delta(D) < \delta$.

Za vsak k obstaja $t_k, s_k \in [x_{k-1}, x_k]$, da je

$$M_k - f(t_k) < \frac{\varepsilon}{(b-a)} \quad \text{in} \quad f(s_k) - m_k < \frac{\varepsilon}{(b-a)}.$$

Torej:
$$\left|\sum M_k\delta_k - I\right| = \left|\sum f(t_k)\delta_k + \sum (M_k - f(t_k))\delta_k - I\right| \leq$$
$$\leq \varepsilon + \varepsilon$$

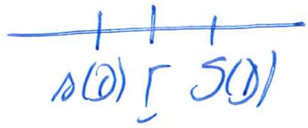
Podobno $\left|\sum m_k\delta_k - I\right| < 2\varepsilon$

Torej $S(D) - s(D) = |S(D) - I + I - s(D)| < 4\varepsilon$.

($\Leftarrow$) denimo, da je f D. intgb. in $S = s = I$

Vemo, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsako delitev D, za katero je $\delta(D) < \delta$ velja: $S(D) - s(D) < \varepsilon$.

Izberimo polj. delitev D, $\delta(D) < \delta$ in



vsakojemo izbiro testnih točk T_D.

$$s(D) \leq R(f, D, T_D) \leq S(D) \Rightarrow |R(f, D, T_D) - I| < \varepsilon$$

$\blacksquare$

Opomba. Odslej bomo uporabljali izraz integrabilna funkcija.
Obstajajo še druge vrste integralov.