Izrek. Naj bo f integrabilna na $[a,b]$, $m = \inf f$ in $M = \sup f$ in g zvezna funkcija na $[m,M]$. Potem je $F = g\circ f$ integrabilna na $[a,b]$.

Dokaz. Izb. polj. $\varepsilon > 0$. Enakom. zv.:

$\exists \delta > 0$, da za $u, u' \in [m,M]$ velja: če $|u-u'| < \delta$, potem $|g(u)-g(u')| < \varepsilon$

Ker je f integrabilna, obstaja delitev D intervala $[a,b]$, da je

$$S_f(D) - s_f(D) < \varepsilon\delta.$$

$$S_f(D) - s_f(D) = \underset{\substack{\uparrow \\ M_k - m_k < \delta}}{\sum{}'}(M_k - m_k)\delta_k + \sum{}''(\underset{\substack{\uparrow \\ M_k - m_k \geq \delta}}{M_k - m_k})\delta_k < \varepsilon\delta$$

$\sum'$ 1) $\overline{m}_k = \inf\{g\circ f(x);\ x\in[x_{k-1}, x_k]\}$

$\overline{M}_k = \sup\{g\circ f(x);\ \text{—} \,\,"\,\, \text{—}\}$.

Ker je $M_k - m_k < \delta$, je $\overline{M}_k - \overline{m}_k < \varepsilon$, zato $\sum'(\overline{M}_k - \overline{m}_k)\delta_k < \varepsilon \sum'\delta_k \leq$
$\leq \varepsilon(b-a)$

$\sum''$ 2) $M_k - m_k \geq \delta$:

$$\sum_k{}'' \delta\delta_k \leq \sum (M_k - m_k)\delta_k < \varepsilon\delta, \quad \text{sledi } \sum_k{}''\delta_k < \varepsilon.$$

$$\overline{m} = \inf_{[a,b]}\{g\circ f\}, \quad \overline{M} = \sup_{[a,b]}\{g\circ f\}$$

$$\sum{}''(\overline{M}_k - \overline{m}_k)\delta_k \leq (\overline{M} - \overline{m})\sum_k{}''\delta_k < (\overline{M} - \overline{m})\varepsilon$$

Sledi: $S_{g\circ f}(D) - s_{g\circ f}(D) = \sum(\overline{M}_k - \overline{m}_k)\delta_k < \varepsilon(b-a) + \varepsilon(\overline{M} - \overline{m})$

$\blacksquare$

Posledica. Če je f integrabilna na $[a,b]$, sta tudi $|f|$ in f^n integrabilni na $[a,b]$.

LASTNOSTI DOLOČENEGA INTEGRALA

<u>Trditev</u>. Naj bosta f in g integrabilni funkciji na $[a,b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(1) $f \pm g$ je integrabilna na $[a,b]$ in $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

(2) λf je intgb. na $[a,b]$ in velja $\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$.

(3) $f \cdot g$ je integrabilna na $[a,b]$.

(4) Če je $f(x) \leq g(x)$ za vse $x \in [a,b]$, potem je

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \quad \text{(monotonost integrala)}$$

Posebej, če je $f(x) \geq 0$ $\forall x$, je $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

(5) $\left|\int_a^b f(x)(x)\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

(6) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$,

Zato (6) velja za vse a, b, c.

Dogovor:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \quad \int_a^a f(x)dx = 0.$$

<u>Dokaz</u> (1) $R(f \pm g, D, T_D) = R(f, D, T_D) \pm R(g, D, T_D)$ za $\forall D$ in $\forall$ izbl. T_D.

Ker lim. na desni obstaja, obstaja lim. na levi in sta enaki.

(3) $f+g$ je intgb., zato so $(f+g)^2$, f^2, g^2 integrabilne,

torej je $\frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$ integrabilna.

(4) Iz $f(x) \leq g(x)$ $\forall x$, sledi $R(f, D, T_D) \leq R(g, D, T_D)$ $\forall D$, $\forall$ izb. T_D,

odtod izpeljemo, da neenakost velja tudi v limiti.

(5) $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \Rightarrow -\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

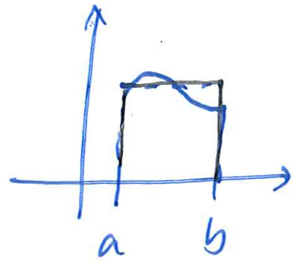
(6) Sledi iz dokaza leme o adit. domene.

POVPREČNA VREDNOST

<u>Motivacija</u>: $x_1,\dots,x_n$: povprečje $= \frac{1}{n}(x_1+\dots+x_n)$.

<u>Definicija</u>. Naj bo f integrabilna funkcija na $[a,b]$.
Povprečna vrednost funkcije f na $[a,b]$ je $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx =: \mu$

<u>Opomba</u>. Za nenegativne funkcije f je to tisto število μ, da je ploščina pod grafom enaka ploščini pravokotnika.



<u>Izrek</u>. Naj bo f integrabilna na $[a,b]$, $m=\inf f$ in $M=\sup f$.
Potem za povprečno vrednost μ funkcije f velja:

$$m \le \mu \le M.$$

Če je f zvezna, potem obstaja $c\in[a,b]$, da je $\mu = f(c)$.

<u>Dokaz</u>. Velja $m \le f(x) \le M$ za vsak $x\in[a,b]$.
Monotonost integrala da:

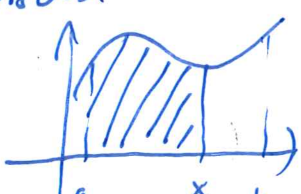
$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx = M(b-a).$$

Če je f zvezna, potem doseže vse vrednosti med m in M. $\blacksquare$

OSNOVNI IZREK ANALIZE

<u>Definicija</u>. Naj bo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabilna funkcija.
Funkcijo $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, definirano s predpisom

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

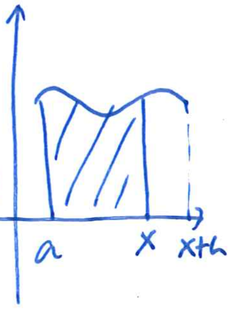


imenujemo <u>integral kot funkcija zgornje meje</u>.

DK

Izrek (osnovni izrek analize).

Naj bo f integrabilna funkcija na $[a,b]$. Tedaj je funkcija $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ zvezna na $[a,b]$. Če je v točki x f zvezna, potem je F v točki x odvedljiva in velja: $F'(x)=f(x)$.



Dokaz 1) Ker je f integrabilna na $[a,b]$, je na $[a,b]$ omejena: $\exists M: |f(x)|\le M \ \forall x\in[a,b]$.

$x,x'\in[a,b]$:

$$F(x)-F(x')=\int_a^x f(t)\,dt-\int_a^{x'} f(t)\,dt=\int_{x}^{x'} f(t)\,dt$$

$$x'>x: \quad |F(x)-F(x')|\le\int_x^{x'}|f(t)|\,dt\le M(x'-x)$$

$$x'<x: \quad |F(x)-F(x')|\le\int_{x'}^{x}|f(t)|\,dt\le M(x-x')$$

Torej: $|F(x)-F(x')|\le M|x-x'| \ \forall x,x'\in[a,b]$.

Torej za $\varepsilon>0$ vzamemo $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$ in dobimo, da je F enakomerno zv. na $[a,b]$.

2) Vemo, da je f zvezna v točki x.

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt=\underbrace{\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dt}_{=f(x)}+\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))\,dt$$

Ker je f zv. v x: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, da za $|t-x|<\delta$ velja $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$.

Vemo, da je $|h|<\delta$ in $h>0$:

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))\,dt\right|\le\frac{1}{|h|}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt\le\frac{1}{|h|}\varepsilon\int_x^{x+h}dt=\varepsilon$$

Podobno za $h<0$.

∎

Posledica. Vsaka zvezna funkcija na $[a,b]$ ima primitivno funkcijo na $[a,b]$.

Natančneje: če je f zvezna na $[a,b]$, je $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ odvedljiva na $[a,b]$ in velja $F'(x)=f(x)$.

Opomba. Nima vsaka integrabilna funkcija primitivne funkcije. Npr. funkcija z enim skokom.

Izrek (osnovni izrek integralnega računa – Leibnizova formula).
Naj bo f taka integrabilna funkcija na $[a,b]$, ki ima na $[a,b]$ primitivno funkcijo F, tj. $F'=f$ na $[a,b]$.
Potem velja Leibnizova formula

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a).$$

Opomba. Izrek velja za vse zvezne funkcije f.

Dokaz. 1) Za zvezno f: potem je $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ njena primit. funkcija in zanjo izrek velja: $F(b)-F(a)=\int_a^b f(t)\,dt$.
Če je G katerakoli druga primit. funkcija od f, je $G=F+c$ za nek $c\in\mathbb{R}$, torej: $G(b)-G(a)=\int_a^b f(t)\,dt$.
2) V splošnem: Naj bo D polj. delitev intervala $[a,b]$.
Po Lagr. izreku $\forall i\ \exists t_i\in[x_{i-1},x_i]$:

$$F(x_i)-F(x_{i-1}) = F'(t_i)\delta_i = f(t_i)\delta_i \quad \Big/ \sum_{i=1}^{n}$$

$$F(b)-F(a) = R(f,D,T_D) \xrightarrow[\delta(D)\to 0]{} \int_a^b f(x)\,dx.$$

$\boxed{\text{☒}}$

Primer. $\int_a^b x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1}-\frac{a^{n+1}}{n+1}.$

Tako nezvezne integrabilne funkcije, ki imajo primitivno funkcijo, obstajajo:

Primer. $F(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$

$x>0$: $F'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$

$$F'(0)=\lim_{x\searrow 0}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\searrow 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

Torej F je odvedljiva na $\mathbb{R}$.

Naj bo $f(x)=F'(x)$. Ker $\lim_{x\searrow 0}f(x)$ ne obstaja, f ni zvezna.

Ker je f omejena in zvezna povsod razen v 0, je integrabilna na vsakem intervalu.

Osnovni izrek analize velja:

$$\int_0^a f(x)\,dx=F(a)-F(0)=F(a).$$

27.3.2018
28.3.2018
20.3.2015

UVEDBA NOVE SPREMENLJIVKE IN INT. PO DELIH V DOLOČENEM INTEGRALU

Izrek (1) Naj bo $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ zvezno odvedljiva in $f:Z_\varphi\to\mathbb{R}$ zvezna. Potem velja

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}f(x)\,dx.$$

(pišemo: uvedemo novo spremenljivko $x=\varphi(t)$).

(2) Naj bosta $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ zvezno odvedljivi funkciji.

Potem je

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Dokaz. 1) Naj bo F primitivna funkcija od f (obstaja, saj je f zvezna).
Kompozitum $G(t)=F(\varphi(t))$ je zvezno odvedljiv na $[a,b]$ in velja $G'(t)=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$. Zato je G primitivna funkcija od $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ na $[a,b]$, zato velja

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = G(b)-G(a) = F(\varphi(b))-F(\varphi(a)) =$$

$$= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx. \qquad \square$$

2) $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)g'(x)$.
Torej je $f\cdot g$ primit. funkcija $f'\cdot g + fg'$ in velja:

$$\int_a^b \big(f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\big)\,dx = (f\cdot g)(b)-(f\cdot g)(a) \qquad \square$$

Primer. 1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} t\sin t^2\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin u\,du = -\frac{\cos u}{2}\Big|_0^{\pi} = \underline{1}$

$u=t^2=\varphi(t)$ $\quad \varphi(0)=0,\ \varphi(\sqrt{\pi})=\pi$

$du=2t\,dt$

2) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - e^x\Big|_0^1 = \underline{1}$

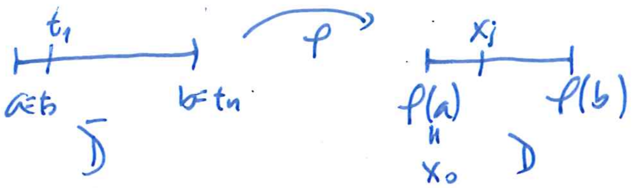
$u=x \quad dv=e^x dx$

$du=dx \quad v=e^x$

Izrek. Naj bo φ zvezno odvedljiva, naraščajoča na $[a,b]$ in ter f integrabilna na $[\varphi(a),\varphi(b)]$.
Tedaj je $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ integrabilna na $[a,b]$ in velja:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

Dokaz.



$x_j = \varphi(t_j)$, $0 \le j \le n$

Fiksirajmo $\varepsilon > 0$. $\exists \delta$: $\delta(D) < \delta \Rightarrow \left| R(f, D, T_D) - \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$.

Ker je φ enakom. zv. na $[a,b]$ $\exists \delta' > 0$:

če $|t - t'| < \delta' \Rightarrow |\varphi(t) - \varphi(t')| < \delta$.

Oglejmo si Riem. vsoto za $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$:

$$R(f \circ \varphi \cdot \varphi', \bar{D}, T_{\bar{D}}) = \sum f(\varphi(c_j)) \cdot \varphi'(c_j) \cdot (t_j - t_{j-1})$$

Po Lagr. izreku: $\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1}) = x_j - x_{j-1} = \varphi'(\bar{c}_j) \cdot (t_j - t_{j-1})$ za nek $\bar{c}_j \in ($

Če je $\delta' > 0$ dovolj majhen, zaradi enakom. zv. φ' velja:

če $|t - t'| < \delta' \Rightarrow |\varphi'(t) - \varphi'(t')| < \varepsilon$.

Naj bo $M = \sup_{[\varphi(a), \varphi(b)]} |f|$.

$$R(f \circ \varphi, \varphi', \bar{D}, T_{\bar{D}}) = \sum f(\varphi(c_j)) \cdot \varphi'(c_j)(t_j - t_{j-1}) =$$

$$= \underbrace{\sum f(\varphi(c_j)) \cdot \varphi'(\bar{c}_j)(t_j - t_{j-1})}_{= \sum f(\varphi(c_j)) \cdot (x_j - x_{j-1}) = R(f, D, T_D)} + \underbrace{\sum f(\varphi(c_j))(\varphi'(c_j) - \varphi'(\bar{c}_j))(t_j - t_{j-1})}_{=: \sigma}$$

Sledi:

$$\left| R((f \circ \varphi) \cdot \varphi', \bar{D}, T_{\bar{D}}) - \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \left| R(f, D, T_D) - \int_a^b f(x)\,dx \right| + |\sigma| \le$$

$$\le \varepsilon + M \cdot (b - a) \cdot \varepsilon. \quad \blacksquare$$

$|\sigma| \le M \cdot \varepsilon (b - a)$

IZREKI O POVPREČJIH

Spomnimo se, da je povprečje integrabilne funkcije f na $[a,b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

<u>Izrek</u>. Naj bosta f in g integrabilni funkciji na $[a,b]$, naj za $m, M \in \mathbb{R}$ velja: $m \leq f(x) \leq M$ za vsak $x \in [a,b]$ in naj bo g na $[a,b]$ istega znaka ($g \geq 0$ ali $g \leq 0$).

Tedaj velja: $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$, za nek $\mu \in [m,M]$.

Če je f zvezna, potem $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$.

<u>Dokaz</u>. Denimo, da je $g(x) \geq 0$ za $x \in [a,b]$; tedaj:

$$mg(x) \leq g(x)\cdot f(x) \leq Mg(x) \quad \forall x$$

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b g(x)f(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx \text{ za nek } \mu \in [m,M].$$

Če je f zvezna, potem je μ dosežen, če za m vzamemo $\inf f$ in za M vzamemo $\sup f$. $\blacksquare$

<u>Posledica</u>. Naj bo f zvezna na $[a,b]$. Obstaja $c \in [a,b]$, da je

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

je zvezna

<u>Dokaz</u>. $g(x) = 1$, $x \in [a,b]$.

Izrek. Naj bo f zvezna na $[a,b]$, g nenegativna, padajoča in zvezno odvedljiva na $[a,b]$. Potem velja

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx \text{ za nek } c\in[a,b].$$

Dokaz. Naj bo

$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$. Potem je F primit. funkcija f.

$$I=\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b F'(x)g(x)\,dx \overset{\text{per partes}}{=}$$

$$= F\cdot g\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx = F(b)g(b) + \int_a^b F(x)\cdot\underbrace{(-g'(x))}_{\geq 0}\,dx$$

Naj bo $m=\inf F$, $M=\sup F$ in ocenimo I:

$$I\leq M\cdot g(b) + M\int_a^b (-g'(x))\,dx = Mg(b)+M(-g(b)+g(a)) = Mg(a)$$

$$I\geq mg(b)+\int_a^b m(-g'(x))\,dx = mg(b)+m(-g(b)+g(a)) = mg(a).$$

Sledi: $mg(a)\leq I\leq Mg(a) \Rightarrow \exists c\in[a,b]: I=g(a)\cdot F(c) =$
$= g(a)\int_a^c f(x)\,dx.$ ■

Primer. $0<a<b$

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx = g(a)\cdot\int_a^c \sin x\,dx =$$

je integrabilna na $[a,b]$ ✓

$g(x)=\frac{1}{x}$

$$= \frac{1}{a}(\cos c - \cos a)$$

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leq \frac{2}{a} \quad \forall a>0 \quad (\text{neodvisno od } b).$$