

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Luka Golob
Algoritem RSK

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Matjaž Konvalinka

Ljubljana, 2022

KAZALO

1. Uvod	4
2. Simetrične funkcije	4
3. Baze in skalarni produkt	5
4. Algoritem RSK	7
Literatura	8

Algoritem RSK

POVZETEK

To je osnutek moje diplomske naloge o algoritmu RSK. Poudarek je narejen na njegovi uporabi pri preučevanju simetričnih funkcij. Natančneje, nam bo algoritem RSK bistveno pripomogel pri dokazu Cauchyve identitete, ki pokaže, da Schurove simetrične funkcije sestavljajo ortonormirano bazo za algebro simetričnih funkcij.

RSK Algorithm

ABSTRACT

Math. Subj. Class. (2020): 05Axx

Ključne besede: algoritem RSK, simetrične funkcije, Schurove funkcije

Keywords: RSK algorithm, symmetric functions, Schur functions

1. UVOD

Prvi del besedila je namenjen obravnavi simetričnih funkcij, kar vključuje njihovo definicijo, nekatere baze simetričnih funkcij in skalarni produkt. V drugem delu opišemo postopek algoritma RSK in v izreku zaokrožimo njegovo vsebino. Ta nam nato omogoči, da dokažemo pomemben rezultat v teoriji simetričnih funkcij.

Skozi celotno nalogo bom upoštevali:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.
- Zapis $\lambda \vdash n$ pomeni, da je λ razčlenitev naravnega števila n .
- S Par označujemo množico vseh particij.
- Kompozicije in particije bomo formalno obravnavali kot neskončna zaporedja, ki so od nekega indeksa naprej konstantno enaka nič. To pomeni, da bo npr. razčlenitev $(4, 2, 1)$ formalno predstavljal zaporedje $(4, 2, 1, 0, 0, \dots)$.

2. SIMETRIČNE FUNKCIJE

Definicija 2.1. Naj bo K cel kolobar karakteristike 0. Z $\mathbb{N}^\infty$ označujemo vsa zaporedja naravnih števil, ki imajo le končno mnogo neničelnih elementov. Tedaj definiramo $K[[x_1, x_2, \dots]]$ kot množico vseh preslikav $\mathbb{N}^\infty \rightarrow K$ z definirano vsoto, skalarnim množenjem in množenjem:

$$\begin{aligned}(f + g)(X) &:= f(X) + g(X), \\ (kf)(X) &:= k(f(X)), \\ (fg)(X) &:= \sum_{Y, Z \in \mathbb{N}^\infty, Y+Z=X} f(Y)g(Z),\end{aligned}$$

za $f, g \in K[[x_1, x_2, \dots]]$, $k \in K$ in vse $X \in \mathbb{N}^\infty$. Tako definirana struktura je K -algebra, ki jo imenujemo *algebra formalnih potenčnih vrst* v števno mnogo spremenljivkah.

Opombe:

- Algebra je komutativna in nima deliteljev nič. Enoto podeduje iz kolobarja K , zato ima karakteristiko enako 0.
- Vsota pri definiciji množenja je končna, in zato dobro definirana.
- Kot je navada, elemente v algebri formalnih potenčnih vrst označujemo v polinomski obliki. Tako npr. preslikavo $f \in K[[x_1, x_2, \dots]]$ s predpisom

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots) = \begin{cases} 1 & , x_1 + x_2 + \dots = 2 \\ 0 & , \text{sicer} \end{cases}$$

zapišemo kot

$$f(X_1, X_2, \dots) = X_1^2 + X_1X_2 + X_1X_3 + \dots + X_2^2 + X_2X_3 + \dots.$$

Definicija 2.2. Homogena simetrična funkcija f reda $n \in \mathbb{N}$ je element $K[[x_1, x_2, \dots]]$, za katerega koeficienti pri poljubnem členu $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots$ izpolnjujejo pogoja:

- Koeficient je enak nič, razen če je $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots = n$.
- Za poljubno permutacijo w naravnih števil, je koeficient pri $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots$ enak koeficientu pri $x_{w(1)}^{\alpha_1}x_{w(2)}^{\alpha_2}\dots$.

Definiramo Λ_K^n kot množico vseh *homogenih simetričnih funkcij reda n* nad kolobarjem K .

Nas predvsem zanima primer $K = \mathbb{Q}$, pri katerem bomo indeks opuščali in pisali Λ^n . Krajšali bomo tudi $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots$ z x^α (kjer $x = (x_1, x_2, \dots)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$). Homogene simetrične funkcije so zaprte za množenje in seštevanje, zato nanje najprej gledamo kot na vektorski podprostor, smiselno pa jih je tudi množiti.

Lema 2.3. *Iz $f \in \Lambda_K^n$ in $g \in \Lambda_K^m$, sledi $fg \in \Lambda_K^{m+n}$.*

Definiramo

$$\Lambda := \Lambda^0 \oplus \Lambda^1 \oplus \cdots,$$

kjer so elementi Λ takšne vsote $f = f_0 + f_1 + \cdots$, $f_i \in \Lambda^i$, da je zgolj končno mnogo f_i neničelnih. Tako definirana Λ je $\mathbb{Q}$ -algebra, imenujemo jo *algebra simetričnih funkcij*. V naslednjih poglavjih bomo obravnavali nekatere njene baze.

3. BAZE IN SKALARNI PRODUKT

Algebra simetričnih funkcij je nepregledna, saj ima navadno vsaka funkcija neskončno členov. Da jo lažje razumemo, obravnavamo njene baze. Izkaže se, da obstaja več smiselnih baz, med katerimi ima vsaka svoje ugodne lastnosti.

Definicija 3.1. Pri danem $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \vdash n$, definiramo

$$m_\lambda := \sum_{\alpha} x^\alpha,$$

kjer α teče čez vsa različna zaporedja $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, ki jih dobimo s permutacijo vektorja $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$.

Definicija 3.2. Za $n \in \mathbb{N}$ in $\lambda \in \text{Par}$ definiramo:

$$h_n := \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda = \sum_{1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n} x_1 \cdots x_n,$$

$$h_\lambda := h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \cdots, \quad \text{kjer } \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots).$$

Množici takšnih funkcij rečemo *polne simetrične funkcije*.

Izrek 3.3. *Množici $\{m_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ in $\{h_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ sta bazi za Λ^n . Splošneje polne in monomske simetrične funkcije vsaka zase tvorita bazo za Λ .*

Monomske simetrične funkcije so definirane tako, da v njih naravno prepoznamo bazo. Kot prikaz uporabnosti definicije polnih simetričnih funkcij predstavljamo naslednjo trditev.

Obravnavali bomo produkt neskončno mnogo formalnih potenčnih vrst. Formalno se tega lotimo s pojmom konvergence, katerega bomo tu zaobšli. Za osnovno razumevanje je dovolj privzeti, da je neskončni produkt vsota vseh monomov v razširitvi, ki vsebujejo le končno mnogo spremenljivk.

Trditev 3.4. *Definiramo formalno potenčno vrsto*

$$H(t) := \sum_{n=0}^{\infty} h_n t^n \in \Lambda[[t]].$$

Tedaj velja zveza

$$H(t) = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - x_i t^i)^{-1}.$$

Sedaj bomo na algebri simetričnih funkcij definirali skalarni produkt z lastnostjo, da sta si $\{m_\lambda\}$ in $\{h_\mu\}$ dualni glede na ta produkt.

$$\langle m_\lambda, h_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}, \quad \text{za vsaki razčlenitvi } \lambda \text{ in } \mu.$$

Oznaka $\delta_{\lambda\mu}$ označuje Kroneckerjevo delto. S tem smo dobro definirali bilinearno formo. Pokažimo, da je skalarni produkt.

Trditev 3.5. *Bilinearna forma, definiran zgoraj, je simetrična in pozitivno definitna, torej velja:*

- $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$ za vse $f, g \in \Lambda$.
- $\langle f, f \rangle \geq 0$, za vse simetrične funkcije in enakost velja natanko tedaj, ko $f = 0$.

Lema 3.6. *Naj bosta $\{u_\lambda\}$ in $\{v_\lambda\}$ bazi za algebro simetričnih funkcij, pri katerih za vse $\lambda \vdash n$ velja $u_\lambda, v_\lambda \in \Lambda^n$. Tedaj sta $\{u_\lambda\}$ in $\{v_\lambda\}$ dualni, če in samo če velja*

$$\sum_{\lambda} u_{\lambda}(x) v_{\lambda}(y) = \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1}.$$

Lema bo prišla prav pri Schurovih simetričnih funkcijah, katere bomo v nadaljevanju definirali preko *polstandardnih Youngovih tabel* (krajšamo: SSYT). Te so skupek naravnih števil, razporejenih v obliki diagramov razčlenitev, tako da so števila v posameznih vrsticah razporejena šibko naraščajoče, v stolpcih pa strogo naraščajoče. Glej spodnji primer tabele $T = (T_{ij})$.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 5 & \\ 4 & & & \end{array}$$

Tabeli naravno pripada taka razčlenitev λ , da za vsak neničelni λ_i velja, da so $T_{i1}, \dots, T_{i\lambda_i}$ natanko tista mesta v vrstici i , ki so zapolnjena s števili. Razčlenitvi λ bomo rekli *oblika* SSYT in pisali $\lambda = \text{sh}(T)$. Rečemo, da ima SSYT T tip $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ in označimo $\alpha = \text{type}(T)$, če tabela vsebuje α_i števil i ($i = 1, 2, \dots$). Zgornja tabela je oblike $(4, 3, 1, 0, \dots)$ in tipa $(2, 1, 1, 2, 2, 0, \dots)$. Če ima SSYT T tip α , pišemo

$$x^T = x^{\text{type}(T)} = x_1^{\alpha_1(T)} x_2^{\alpha_2(T)} \dots$$

Tako imamo v našem primeru $x^T = x_1^2 x_2^2 x_3^3 x_4^2 x_5^2$.

Definicija 3.7. Naj bo λ razčlenitev. Definiramo

$$s_\lambda(x) := \sum_{T, \text{sh}(T)=\lambda} x^T \in \mathbb{Q}[[x_1, x_2, \dots]],$$

kjer T v vsoti teče po vseh SSYT tipa λ . Tako definirani funkciji s_λ rečemo *Schurova funkcija* oblike λ .

Izrek 3.8. *Za vsako $\lambda \vdash n \in \mathbb{N}$, je s_λ simetrična funkcija.*

Ni takoj jasno, zakaj bi bile simetrične funkcije takšne oblike ugodne. Izkaže se, da tvorijo eno najpomembnejših baz.

Izrek 3.9. *Pri nekem $n \in \mathbb{N}$, množica $\{s_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ sestavlja bazo vektorskega prostora Λ^n .*

4. ALGORITEM RSK

Definiramo $\mathbb{N}$ -matriko kot matriko poljubne velikosti, katere členi so naravna števila.

Algoritem RSK je postopek, preko katerega neki $\mathbb{N}$ -matriki, ki ima le končno mnogo neničelnih elementov, priredimo par polstandardnih Jangovih tabel, ki imata enako obliko. Kombinatorično bistvo leži v tem, da RSK algoritem inducira bijekcijo med tema strukturama. To lastnost bomo kasneje izkoristili pri obravnavi *Schurovih funkcij*.

Osnovna operacija RSK algoritma je *vstavljanje* $P \leftarrow k$ naravnega števila k v SSYT $P = (P_{ij})$. Operacija $P \leftarrow k$ je definirana takole: Oznako k si predstavljamo kot spremenljivko, v kateri imamo shranjeno število, katero v tistem trenutku vstavljamo. Naj bo r največje naravno število, za katerega velja $P_{1,r-1} \leq k$. Tedaj k vstavimo na mesto P_{1r} in element, ki je bil prej na tem mestu, shranimo v spremenljivko k . Rekli bomo, da je število k izrinilo število P_{1r} . Nato nadaljujemo z vstavljanjem novega števila k v naslednjo vrstico, kar naredimo po istih pravilih s katerimi smo izrivali iz prve vrstice. To ponavljamo, vse dokler ni k večji ali enak, kot največje število v vrstici. V tem primeru je mesto P_{ir} še nezasedeno mesto v tabeli in vanj preprosto vstavimo število k , kar zaključí postopek. Dobljeno tabelo bomo označili s $P \leftarrow k$.

Kot primer vzamemo neko SSYT in vanjo vstavimo število 3. S poudarjenimi črkami smo označili tista mesta, ki so se tekom vstavljanja spremenila.

P	$P \leftarrow 3$
1 1 3 4	1 1 3 3
2 5 5	2 4 5
4	4 5

Trditev 4.1. Če je P SSYT in k naravno število, je tudi $P \leftarrow k$ SSYT.

Sedaj bomo s pomočjo vstavljanja definirali RSK algoritem. Naj bo $A = (a_{ij})_{i,j \geq 1}$ $\mathbb{N}$ -matrika z končno mnogo neničelnimi elementi. Spomnimo se, da so $\mathbb{N}$ -matrike tiste matrike poljubne velikosti, katerih členi so naravna števila. Matriki A priredimo *posplošeno permutacijo* ali dvovrstični nabor w_A

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix},$$

za katerega velja:

- (1) $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_m$.
- (2) Če velja $i_r = i_s$ in $r \leq s$, tedaj veja tudi $j_r \leq j_s$.
- (3) Za vsak par (i, j) obstaja natanko a_{ij} naravnih števil r , da velja $(i_r, j_r) = (i, j)$.

Vsaka $\mathbb{N}$ -matrika enolično določa splošno permutacijo in tudi vsaka splošna permutacija, ki izpolnjuje pogoje (1), (2) in (3), določa $\mathbb{N}$ -matriko.

Sedaj vzamemo $(P(0), Q(0)) := (\emptyset, \emptyset)$ (kjer $\emptyset$ označuje prazno SSYT) in rekurzivno definiramo (za $t = 1, \dots, m$)

$P(t+1) = P(t) \leftarrow j_{t+1}$,
 $Q(t+1) = SSYT$, ki jo dobimo tako, da tabeli $Q(t)$ dodamo
število i_{t+1} , tako da imata $Q(t+1)$ in $P(t+1)$ enako obliko.

Na koncu dobimo dvojico $(P(m), Q(m))$ in označimo

$$A \xrightarrow{\text{RSK}} (P(m), Q(m)) =: (P, Q).$$

Ta postopek oziroma korespondenco med A in (P, Q) imenujemo algoritem RSK.

Izrek 4.2. *Algoritem RSK inducira bijekcijo med $\mathbb{N}$ -matrikami s končno mnogo neničelnimi elementi in dvojicami (P, Q) SSYT iste oblike. Če za neko $\mathbb{N}$ -matriko A in neko dvojico (P, Q) velja $A \xrightarrow{\text{RSK}} (P, Q)$, tedaj morata imeti matrika in dvojica nekatere skupne lastnosti:*

$$(1) \quad \text{Število } j \text{ se pojavi v } P \text{ natanko } \sum_i a_{i,j} \text{ krat.}$$

$$(2) \quad \text{Število } i \text{ se pojavi v } Q \text{ natanko } \sum_j a_{i,j} \text{ krat.}$$

Sledi glavni rezultat te naloge, ki bo kombinatorično vsebino algoritma RSK uporabil v teoriji simetričnih funkcij.

Izrek 4.3. *(Cauchyjeva identiteta)*

Velja zveza

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(x) s_{\lambda}(y),$$

kjer vsota na levi teče čez vse razčlenitve λ .

Na levi strani Cauchyve identitete prepoznamo $\mathbb{N}$ -matrike, na desni pa dvojice SSYT istih oblik. Če uporabimo še lemo 3.6, neposredno sledi naslednji rezultat.

Trditev 4.4. *Schurove funkcije tvorijo ortonormirano bazo za definirani skalarni produkt.*

LITERATURA

- [1] Richard P. Stanley *Enumerative Combinatorics* (Volume 2) [str. 286–322]