

Bellovi polinomi in umbralni račun

Tadej Glinšek

Mentor: izr. prof. dr. Pavle Saksida

28. februar 2022

1 Uvod

Bellovi polinomi izvirajo iz preštevanja različnih tipov razdelitev končnih množic. Lahko jih preučujemo z vidika t. i. umbralnega računa, ki je močno orodje za izpeljavo in dokazovanje identitet o nekaterih družinah polinomov.

2 Definicija Bellovih polinomov

Bellove polinome je najnaravneje definirati na kombinatoričen način. Najprej opazujmo razdelitve neke končne množice X na bloke. V ta namen definirajmo Bellove polinome $B_{n,k}$ kot družino polinomov, indeksirano po spremenljivkah n – ta predstavlja moč množice X – in pa k , ki predstavlja število blokov v razdelitvi.

Želimo, da vsak tak polinom vsebuje informacije o velikostih teh blokov in številu blokov določene velikosti. To informacijo bodo zakodirale spremenljivke Bellovega polinoma, ki jih označimo z x_i , kjer $i \in \{1, 2, \dots, n - k + 1\}$. Te spremenljivke predstavljajo posamezne bloke, indeks i pa velikost tega bloka.

Posamezne razdelitve nato predstavimo z množenjem teh spremenljivk. Na primer, člen x_3x_5 bi predstavljal razdelitev množice X na dva bloka: enega velikosti 3, drugega velikosti 5.

Ker hočemo, da Bellovi polinomi zakodirajo informacijo o vseh možnih razdelitvah množice X , bomo obstoj več različnih razdelitev nakazali s seštevanjem členov, ki predstavljajo posamezne razdelitve. Na primer, vsota $4x_1x_3 + 3x_2^2$ (ki jo lahko zapišemo tudi kot $x_1x_3 + x_1x_3 + x_1x_3 + x_1x_3 + x_2x_2 + x_2x_2 + x_2x_2$) nam pove, da obstajajo štiri razdelitve tipa x_1x_3 (razdelitve na en enojec in en blok velikosti tri) in tri razdelitve tipa x_2^2 (razdelitve na dva bloka, oba velikosti dve). Ta vsota ravno ustreza Bellovemu polinomu

$B_{4,2}(x_1, x_2, x_3)$. Izraz nam torej pove, da lahko množico štirih elementov razdelimo na dva bloka na sedem različnih načinov.

2.1 Eksplicitna formula

Iz kombinatorične definicije se da izpeljati še eksplicitno formulo:

Trditev 1. Za Bellove polinome $B_{n,k}$ velja

$$B_{n,k}(x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1}) = \sum \frac{n!}{c_1! c_2! \dots c_{n-k+1}!} \prod_{i=1}^{n-k+1} \left(\frac{x_i}{i!}\right)^{c_i},$$

kjer vsota teče po vseh $c_1, c_2, \dots, c_{n-k+1}$, da velja $c_1, c_2, \dots, c_{n-k+1} \geq 0$, $c_1 + c_2 + \dots + c_{n-k+1} = k$ in $c_1 + 2c_2 + \dots + (n-k+1)c_{n-k+1} = n$.

3 Umbralni račun

Umbralni račun je glavno orodje za študiranje lastnosti Bellovih polinomov, temelji pa na t. i. umbralni algebri.

S P bomo označevali algebro polinomov ene spremenljivke, s P^* pa dualni prostor P -ja. Če imamo funkcional $L \in P^*$, potem bomo njegovo delovanje na polinom $p \in P$ označevali z $\langle L | p(x) \rangle$.

Da bo P^* postal algebra, moramo definirati še operacijo množenja:

Definicija 1. Naj $L, M \in P^*$ in $p \in P$. Množenje definiramo kot

$$\langle LM | x^n \rangle = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle L | x^k \rangle \langle M | x^{n-k} \rangle.$$

S tem množenjem P^* postane algebra, ki ji pravimo **umbralna algebra**.

Omejimo se le na določene družine polinomov.

Definicija 2. Zaporedje polinomov $(p_n(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$ je **binomskega tipa**, če velja $p_0(x) = 1$ in če za vsak $n \geq 1$ velja $\deg(p_n) = n$ ter t. i. **binomska identiteta**: $p_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y)$

Izkaže se, da so tudi Bellovi polinomi zaporedje binomskega tipa.

Na umbralni algebri uvedemo še topologijo:

Definicija 3. Naj $L \in P^*$. Zaporedje $(L_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $L_n \in P^*$, konvergira k funkcionalu L , kadar za vsak $p(x)$ obstaja n_0 , da $\langle L_n | p(x) \rangle = \langle L | p(x) \rangle$, za vse $n > n_0$.

Naslednja trditev nam poda koristen kriterij za določanje konvergence vsote funkcionalov:

Trditev 2. *Naslednje trditve so ekvivalentne:*

1. $\langle L \mid 1 \rangle = 0$,
2. Zaporedje L^k konvergira k 0,
3. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k L_k$ konvergira za poljubno zaporedje a_k .

V luči te trditve vpeljemo naslednjo definicijo:

Definicija 4. *Naj $L \in P^*$ funkcional. Če velja $\langle L \mid 1 \rangle = 0$ in $\langle L \mid x \rangle \neq 0$, potem mu pravimo **delta funkcional**.*

Delta funkcionali so bistvenega pomena v umbralnem računu, saj se izkaže, da jim lahko določimo dva posebna zaporedja polinomov.

Definicija 5. *Naj L delta funkcional. Zaporedje polinomov $p_n(x)$ mu je **prirejeno**, če velja*

$$\langle L^k \mid p_n(x) \rangle = n! \delta_{n,k},$$

za vse $n, k \geq 0$, kjer $\delta_{n,k}$ Kroneckerjeva delta.

Izkaže se, da je prirejeno zaporedje funkcionalu enolično določeno. Celo več: vsako zaporedje, ki je prirejeno kakemu delta funkcionalu, je zaporedje binomskega tipa.

Naslednji izrek nam pove, da se da vsak funkcional izraziti kot linearna kombinacija potenc kateregakoli delta funkcionala.

Izrek 1. (Razširitveni izrek) *Naj M funkcional, L delta funkcional s prirejenim zaporedjem $p_n(x)$. Potem velja*

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle M \mid p_k(x) \rangle}{k!} L^k.$$

Izkaže se, da so koeficienti te linearne kombinacije natančno določeni.

Obstaja še drugi način, da delta funkcionalu določimo polinomsko zaporedje:

Definicija 6. *Naj L delta funkcional. Njegovo konjugirano zaporedje je*

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle L^k \mid x^n \rangle}{k!} x^k$$

Spet se izkaže, da je to zaporedje delta funkcionalu enolično določeno. Še več: vsako zaporedje binomskega tipa je konjugirano zaporedje nekega delta funkcionala.

Ta dva tipa zaporedij sta v umbralnem računu bistvenega pomena. Med drugim lahko Bellove polinome zapišemo kot konjugirano zaporedje nekega delta funkcionala.

4 Aplikacija umbralnega računa na Bellovih polinomih

Bellove polinome lahko povsem karakteriziramo z orodji umbralne algebre. V ta namen definiramo naslednji delta funkcional L , da velja:

$$\langle L^k \mid 1 \rangle = 0$$

$$\langle L^k \mid x^j \rangle = x_j$$

za $1 \leq j \leq n - k + 1$.

Izkaže se, da lahko Bellove polinome izrazimo s tem delta funkcionalom.

Trditev 3. *Za delta funkcional L , kot definiran zgoraj, velja:*

$$B_{n,k}(x_1, \dots, x_{n-k+1}) = \frac{\langle L^k \mid x^n \rangle}{k!}$$

5 Momenti in kumulanti

Bellove polinome lahko med drugim uporabimo v verjetnosti. Povezujejo namreč dva pomembna verjetnostna pojma: momente in kumulante.

Definicija 7. *Naj $f(x)$ gostota porazdelitve. n -ti moment μ'_n funkcije f je enak*

$$\mu'_n = E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx,$$

kjer $E[X^n]$ predstavlja pričakovano vrednost slučajne spremenljivke X^n .

Za momente obstaja rodovna funkcija $M_X(t)$, odvisna od slučajne spremenljivke X . Momenti se pojavljajo v koeficientih $M_X(t)$. Izrazimo jo lahko na sledeč način:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = 1 + t\mu'_1 + \frac{t^2\mu'_2}{2!} + \dots + \frac{t^n\mu'_n}{n!} + \dots$$

Kumulante κ_i definiramo kot koeficiente rodovne funkcije za kumulante (označimo s $K_X(t)$), ki pa jo definiramo kot:

$$K_X(t) = \log M_X(t) = t\kappa_1 + \frac{t^2\kappa_2}{2!} + \dots + \frac{t^n\kappa_n}{n!} + \dots$$

Izkaže se, da lahko momente in kumulante izrazimo ene z drugimi. Zvezo med njimi lahko opišemo s pomočjo Bellovih polinomov:

$$\kappa_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (k-1)! B_{n,k}(\mu'_1, \dots, \mu'_{n-k+1})$$

$$\mu'_n = \sum_{k=1}^n B_{n,k}(\kappa_1, \dots, \kappa_{n-k+1})$$

6 Faà di Brunova formula

Pri izpeljavi zgornjih formul pride prav formula za odvajanje kompozituma:

Izrek 2. (Faà di Brunova formula) *Naj bosta f in g n -krat odvedljivi funkciji iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$. Potem velja:*

$$\frac{d^n}{dx^n} f(g(x)) = \sum_{c_1, c_2, \dots, c_n \geq 0} \frac{n!}{c_1! c_2! \dots c_n!} f^{(c_1+c_2+\dots+c_n)}(g(x)) \prod_{j=1}^n \left(\frac{g^{(j)}(x)}{j!} \right)^{c_j},$$

kjer $c_1 + 2c_2 + \dots + nc_n = n$.

Z uvedbo nove spremenljivke $k := c_1 + c_2 + \dots + c_n$ in uporabo eksplcitne formule za Bellove polinome lahko zgornjo formulo prepišemo v drugačni obliki:

Izrek 3. (Alternativna oblika Faà di Brunove formule) *Naj bosta f in g n -krat odvedljivi funkciji iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$. Potem velja:*

$$\frac{d^n}{dx^n} f(g(x)) = \sum_{k=1}^n f^{(k)}(g(x)) B_{n,k}(g'(x), g''(x), \dots, g^{(n-k+1)}(x))$$

Literatura

- [1] S. Roman in G.-C. Rota, *The Umbral Calculus*, Academic Press, Inc., Massachusetts, 1978.
- [2] S. Roman, *The Umbral Calculus*, Academic Press, Inc., Fullerton, 1984.