

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Uroš Kosmač

Jacobijeve eliptične funkcije

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Pavle Saksida

Ljubljana, 2021

KAZALO

1. Uvod	4
1.1. Geometrijski pristop	4
1.2. Fizikalen pristop	5
1.3. Robni pogoji modulusa k	6
Literatura	8

Jacobijeve eliptične funkcije

POVZETEK

Jacobijeve eliptične funkcije se naravno pojavijo v dveh kontekstih: z vidika geometrije, kot parametrizaciji elipse, podobo kot to naredimo pri krožnici ali pa z fizike/analize, kjer se pojavijo kot rešitve matematičnega nihanja. Predstavili bomo oba pristopa, bolj pa se bomo posvetili analitičnemu pristopu, kjer si bomo pogledali motivacijo iz fizike za obravnavo teh nato pa še definicije osnovnih funkcij $sn(x, k)$, $cn(x, k)$ in $dn(x, k)$ in splošne lastnosti le teh, kot so ničle, poli, periodičnost, adicijski izreki... Iz teh lastnosti bomo pokazali kako jih smiselno razširiti na množico kompleksnih števil.

Jacobi elliptic functions

ABSTRACT

Math. Subj. Class. (2020):

Ključne besede:

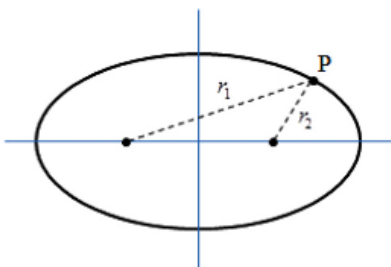
Keywords:

1. UVOD

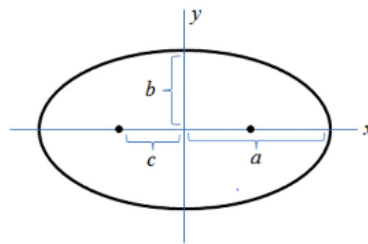
Jacobijeve eliptične funkcije lahko definiramo na (vsaj) dva načina. Pogledali si bomo geometrijski in fizikalni pristop.

1.1. Geometrijski pristop. Pogledajmo si najprej definicijo nato pa še motivacijo za njo:

Definicija 1. Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$ in velja $b > a > 0$. Količini e pravimo linearna ekscentričnost in je $e = \sqrt{b^2 - a^2}$, s k pa bomo označevali numerično ekscentričnost $k = \frac{e}{b}$. V kontekstu eliptičnih funkcij, numerični ekscentričnosti običajno pravimo *modulus*.



SLIKA 1.
Geometrijski opis elipse



SLIKA 2.
Algebraičen opis elipse

Definicija 2. Naj bo $E \subset \mathbb{R}^2$ elipsa podana z enačbo:

$$x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

kjer je $b > 0$ in r razdalja od izhodišča do točke na elipsi, ki zadošča:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Definiramo Jacobijeve eliptične funkcije:

$$\text{sn} : \mathbb{R} \times [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{cn} : \mathbb{R} \times [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{dn} : \mathbb{R} \times [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$$

s predpisom:

$$\text{sn}(u, k) = \frac{y}{b}, \quad \text{cn}(u, k) = x, \quad \text{dn}(u, k) = \frac{r}{b},$$

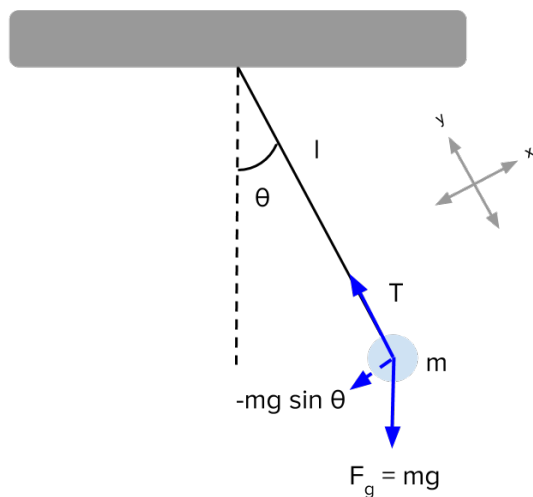
kjer je k modulus elipse in u zadošča pogoju $du = r d\theta$.

Ideja za to definicijo je preprosta. Na isti način kot smo definirali kotne funkcije (vrednosti komponent točke, v kateri premica $y = kx$ za $x \geq 0$ seka enotsko krožnico) analogno definiramo Jacobijeve eliptične funkcije zato se v definiciji pojavi enačba elipse. Razlika v primerjavi s krožnico pa je razdalja od izhodišča do točke na elipsi. Pri krožnici je ta razdalja konstantna pri elipsi pa očitno ni tako, zato imamo pogoj $x^2 + y^2 = r^2$.

Iz definicije je razvidno, da so Jacobijeve eliptične funkcije, funkcije dveh spremenljivk. Drugi argument je u , podan z zvezo $du = r d\theta$ ki nam pove kako so funkcije odvisne od kota θ (to je kot med premico $y = 0$ in premico OP , kjer je P točka na elipsi). S krajšim računom lahko pokažemo, da je ta pogoj ekvivalenten eliptičnemu

integralu prve vrste, ki ga bomo spoznali pri fizikalni motivaciji. Modulus k , torej prvi argument nam pove kako so naše funkcije odvisne od oblike elipse.

1.2. Fizikalen pristop. Motivacija za vpeljavo Jacobijevih eliptičnih funkcij se pojavi pri matematičnem nihalu. Spomnimo se nihajne enačbe:



SLIKA 3. Matematično nihalo

$$(1) \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

Tukaj so l - dolžina vrvice, g - gravitacijski pospešek in $\theta(t)$ - kot odmika od ravnovesne lege v odvisnosti od časa. Z uporabo energijske enačbe ter z nekaj substitucijami enačbo preoblikujemo v:

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}$$

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

Dobimo rešitev diferencialne enačbe, ki ji pravimo eliptični integral prve vrste:

$$t(\theta) = \int_0^\theta \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta$$

Ker delamo nad obsegom realnih števil, je jasno da, mora biti $0 \leq k < 1$. Z vidika fizike je funkcija časa $t(\theta)$ v odvisnosti od kota θ , kar je nekoliko nerodno zato se obravnava inverzna funkcija funkcije $t(\theta)$ kar bomo označevali z $\psi = am(t)$. Inverzija tega integrala je analogna inverziji:

$$t = \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

kjer za zadnji integral vemo, da je ravno $t = \arcsin \phi$ oz. $\phi = \sin t$. Iz tega razloga in drugih zgodovinskih razlogov se obravnava funkcijo $t \mapsto \sin \psi$. To pa je ravno prva Jacobijeva eliptična funkcija, ki jo označimo z sn . Sedaj se polna definicija glasi:

Definicija 3. Naj bo $x : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ eliptični integral prve vrste za $k \in [0, 1)$ in $\psi = \text{am} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ njegov inverz. Jacobijeve eliptične funkcije sn , cn in dn so definirane s predpisi:

$$\begin{aligned} \text{sn} : \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1] & \text{cn} : \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1] & \text{dn} : \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1] \\ x &\mapsto \sin \psi & x &\mapsto \cos \psi & x &\mapsto \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(x)}. \end{aligned}$$

Opomba 1.1. Za razliko od definicije iz prejšnjega razdelka, smo tukaj Jacobijeve eliptične funkcije definirali kot funkcije ene spremenljivke. Tudi tukaj na njih lahko gledamo kot funkcije dveh spremenljivk, če dodamo še odvisnost od modula k , vendar jih bomo v naslednjem delu in tudi v celoti diplomske naloge v večini obravnavali kot funkcije pri fiksnem $k \in [0, 1)$.

1.3. Robni pogoji modula k . V tem razdelku se bomo omejili na drugo definicijo. Za začetek si bomo pogledali robne primere teh funkcij t.j. $k = 0$ in $k = 1$ in definirali vrednost $K \in \mathbb{R}$ kot:

$$(2) \quad K = K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} dx, \quad 0 \leq k < 1.$$

Če ponovno napišemo definicije sn , cn in dn :

$$\begin{aligned} \text{sn}(x) &= \sin \psi \\ \text{cn}(x) &= \cos \psi \\ \text{dn}(x) &= \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(x)}, \end{aligned}$$

kjer je $\psi = \text{am}(x)$ inverzna funkcija funkcije:

$$(3) \quad x(\psi) = \int_0^\psi \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} d\psi$$

Obravnavamo 2 primera:

1. $k = 0$:

3 postane:

$$x = \int_0^\psi 1 d\psi = \psi \implies$$

$$\begin{aligned} \text{sn}(x, 0) &= \sin x \\ \text{cn}(x, 0) &= \cos x \\ \text{dn}(x, 0) &= 1 \\ K(0) &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

2. $k = 1$:
 3 postane:

$$x = \int_0^\psi \frac{1}{\cos \psi} d\psi$$

Ni težko preveriti, da integral konvergira natanko tedaj, ko je $-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$. S kratkim računom hitro preverimo, da je:

$$\sin \psi = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \tanh x.$$

Ker je $\operatorname{cn}(x) = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(x)}$ dobimo še ostali funkciji:

$$\operatorname{sn}(x, 1) = \tanh x$$

$$\operatorname{cn}(x, 1) = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\operatorname{dn}(x, 1) = \frac{1}{\cosh x}$$

$$K(1) = \infty$$

Z drugimi besedami za $k = 0$ dobimo kotne funkcije za $k = 1$ pa hiperbolične funkcije in vidimo, da so Jacobijeve eliptične funkcije posplošitev tako kotnih kot hiperboličnih funkcij.

Nekaj enostavnih vrednosti, ki sledijo neposredno iz definicije so:

$$\operatorname{cn}(0) = \operatorname{dn}(0) = 1$$

$$\operatorname{sn}(0) = 0$$

$$\operatorname{cn}(\pm K) = 0$$

$$\operatorname{sn}(\pm K) = \pm 1$$

$$\operatorname{dn}(\pm K) = \sqrt{1 - k^2} = k'$$

$$\operatorname{sn}(\pm 2K) = 0$$

$$\operatorname{cn}(\pm 2K) = -1$$

$$\operatorname{dn}(\pm 2K) = 1.$$

To je uvedni del diplomske naloge oz. pregled 1. poglavja, kjer smo naredili hiter pregled definicij in motivacije. V nadaljevanju diplomske naloge t.j. v 2. poglavju, si bomo pogledali kako se te funkcije odvajata in razvijeta v potenčne vrste. S pomočjo tega dokažemo še adicijski izrek za Jacobijeve eliptične funkcije in raziskujemo njihovo periodičnost. V zadnjem delu 2. poglavja z Jacobijevo imaginarno transformacijo funkcije razširimo na $\mathbb{R}i$ (razen polov) kar z adicijskim izrekom razširimo na $\mathbb{C}$ (brez polov). V 3. poglavju si pogledamo tri izreke, katerih dokazi temeljijo na lastnostih Jacobijevih eliptičnih funkcij. Prvi izrek nam pove, kakšno podlago (krivuljo) moramo imeti, da bo središče kotaleče elipse ležalo na premici $y = \text{konst.}$

V drugem izreku dokažemo tri lastnosti prostorskih krivulj parametriziranih s Jacobijevimi eliptičnimi funkcijami. Zadnji izrek, ki si ga bomo ogledali na bo povedal, kako lahko v posebnem primeru merimo dolžino loka elipse.

LITERATURA

- [1] Armitage, J., V. (2006). Elliptic Functions (London Mathematical Society Student Texts, Series Number 67) (1st ed.). Cambridge University Press.
- [2] Bottazzini, U., and Gray, J. (2016). Hidden Harmony—Geometric Fantasies: The Rise of Complex Function Theory (Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences) (Softcover reprint of the original 1st ed. 2013 ed.). Springer.
- [3] J. Snape. *Applications of elliptic functions in classical and algebraic geometry*. University of Durham.
- [4] Schwalm, W. A. (2015). Lectures on Selected Topics in Mathematical Physics: Elliptic Functions and Elliptic Integrals (Iop Concise Physics). IOP Concise Physics.
- [5] Edwards, J. (2019). An elementary treatise on the differential calculus, with applications and numerous examples. Alpha Editions.