

Kvazikonformna kirurgija in Hermanovi kolobarji

Beno Učakar

Mentor: doc. dr. Uroš Kuzman

1 Uvod

Diplomska naloga spada na področje kompleksne dinamike. Recimo, da imamo holomorfnu preslikavo $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ iz Riemannove sfere nazaj nase in izbrano točko $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$. Zanimajo nas lastnosti zaporedja $\{f^n(z_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ v odvisnosti od izbrane začetne točke z_0 . Tu oznaka f^n pomeni n -kratno iteracijo funkcije f .

Natančneje si bomo ogledali preslikave s fiksnimi točkami, v bližini katerih dinamika ustreza iracionalni rotaciji na kolobarju. Ta fenomen imenujemo Hermanov kolobar. Glavni cilj diplomske naloge je, da s pomočjo kvazikonformnih preslikav dokažemo obstoj preslikav s Hermanovimi kolobarji.

2 O kompleksni dinamiki

Denimo, da zaporedje $\{f^n(z_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira k neki vrednosti α . Hitro lahko preverimo, da velja $f(\alpha) = \alpha$, torej da je limita α fiksna točka preslikave f . To nas motivira, da fiksne točke natančneje obravnavamo.

Fiksne točke določajo obnašanje zaporedij za začetne vrednosti v bližnji okolici. Na podlagi tega fiksne točke karakteriziramo s pomočjo števila $\lambda = f'(z_0)$, ki ga imenujemo *večkratnost preslikave f v točki z_0* . V svoji diplomski nalogi si bom natančneje ogledal t. i. *iracionalno nevtralne* fiksne točke, torej takšne, da je $|\lambda| = 1$ in $\lambda^n \neq 1$ za vse $n \in \mathbb{N}$.

Pomembno orodje v kompleksni dinamiki je konjugiranje s konformno preslikavo. Spomnimo se, da konformne preslikave lokalno ohranjajo kote in orientacijo. Karakterizirali smo jih na sledeč način.

Trditev 1. *Naj bo $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ odprta množica. Preslikava $f: U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ je konformna natanko tedaj, ko je holomorfna na U in ima povsod na U neničeln odvod.*

Dve preslikavi lahko poistovetimo s pojmom konformne ekvivalence.

Definicija 1. Preslikavi $f: U \rightarrow U$ in $g: V \rightarrow V$ sta *konformno ekvivalentni*, če obstaja konformna preslikava $\phi: U \rightarrow V$, da velja

$$g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}.$$

Konjugiranje s konformno preslikavo lahko razumemo kot spremembo koordinatnega sistema. Če razpišemo

$$g^n = \underbrace{g \circ \dots \circ g}_n = \underbrace{(\phi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ \dots \circ (\phi \circ f \circ \phi^{-1})}_n = \phi \circ f^n \circ \phi^{-1},$$

vidimo, da ta ekvivalenčna relacija ohranja dinamične lastnosti. Če nas zanima dinamika bolj zapletene preslikave v okolici fiksne točke, jo lahko s konjugiranjem prevedemo na kakšno bolj preprosto preslikavo in opazujemo dinamične lastnosti le-te. V našem primeru se bomo ukvarjali s preslikavo $z \mapsto \lambda z$ v okolici izhodišča.

Prvi obsežnejši rezultat moje diplomske naloge bo, da bom pokazal, kdaj takšna konjugacija obstaja za primere iracionalno nevtralnih fiksni točk in da je tedaj enolična. Zadosten pogoj je, da je λ takšno iracionalno število, ki se ga da le slabo aproksimirati z racionalnimi števili, t. i. *Diofantso število*. Pokazal bom tudi, da obstajajo protiprimeri večkratnosti λ , kjer takšna konjugacija ne obstaja.

3 Dinamika racionalnih funkcij

V svoji diplomski nalogi se bom predvsem ukvarjal z racionalnimi preslikavami, zato se v tem poglavju omejimo na te.

Glede na obnašanje zaporedja pri dani racionalni preslikavi R ločimo začetne točke z_0 na tiste, ki so v nekem smislu lepe oziroma predvidljive, in tiste, ki so kaotične. Gre za pojma Fatujeve in Juliajeve množice.

Definicija 2. Naj bo $R: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ nekonstantna racionalna preslikava in $\mathcal{R} = \{R^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ družina iteratov funkcije R . *Fatujeva množica preslikave R* je maksimalna odprta množica točk $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, za katere velja

$$\forall \epsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall z \in \overline{\mathbb{C}}. \forall f \in \mathcal{R}. |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

Juliajeva množica preslikave R je komplement Fatujeve množice v $\overline{\mathbb{C}}$.

Intuitivno lahko pojma razumemo na sledeč način. Točka z_0 je v Fatujevi množici preslikave R , če se bo zaporedje iteratov pri vseh začetnih vrednostih z , ki so blizu z_0 , obnašalo podobno kot zaporedje pri začetni vrednosti z_0 . Nasprotno, če je obnašanje zaporedja iteratov pri kakšni začetni vrednosti z blizu z_0 drugačno kot obnašanje pri začetni vrednosti z_0 , je z_0 v Juliajevi množici.

Juliajeva in Fatujeva množica racionalne preslikave R imata lepo lastnost, da sta za preslikavo R popolnoma invariantni. To pomeni, da sta slika in praslika preslikave R dane množice kar enaki množici sami. Ker je R zvezna preslikava, vemo, da se komponente za povezanost Fatujeve množice slikajo nazaj v komponente za povezanost Fatujeve množice. Torej v nekem

smislu komponente Fatuejve množice potujejo naokoli. Če se zgodi, da se komponenta po n iteracijah vrne na prvotno mesto, govorimo o *periodični komponenti preslikave R s periodo n* .

Racionalna preslikava lahko ima 5 različnih vrst periodičnih komponent. Za mojo diplomsko nalogo sta relevantni naslednji dve.

Definicija 3. Enostavno povezana komponenta Fatuejve množice s periodo n je *Sieglov disk*, če obstaja konformna preslikava ϕ , ki konjugira R^n k iracionalni rotaciji okoli izhodišča na disku s središčem v izhodišču. Natančneje,

$$e^{2\pi i\theta} z = \phi \circ f \circ \phi^{-1}(z),$$

kjer je θ iracionalno število.

Definicija 4. 2-povezana periodična komponenta Fatuejve množice s periodo n je *Hermanov kolobar*, če obstaja konformna preslikava ϕ , ki konjugira R^n k iracionalni rotaciji okoli izhodišča na kolobarju s središčem v izhodišču. Natančneje,

$$e^{2\pi i\theta} z = \phi \circ f \circ \phi^{-1}(z),$$

kjer je θ iracionalno število.

Sedaj poznamo terminologijo, da formuliramo osrednji izrek diplomske naloge.

Izrek 2. Naj bo R racionalna preslikava s Sieglovim diskom, ki je konjugirana k množenju s faktorjem $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, kjer je θ iracionalno število. Potem obstaja racionalna preslikava $\tilde{R}$ s Hermanovim kolobarjem, ki je konjugirana k množenju z istim faktorjem λ .

Vsebina izreka je precej preprosta. Če poznamo racionalno preslikavo, ki ima Sieglov disk, znamo konstruirati novo racionalno preslikavo, ki ima Hermanov kolobar. Gre za eleganten način, kako konstruirati preslikavo, ki ima Hermanov kolobar. Izrek bomo dokazali s pomočjo kvazikonformne kirurgije, zato si v nadaljevanju pogledajmo, kaj so kvazikonformne preslikave.

4 Kvazikonformne preslikave

Kvazikonformne preslikave so naravna posplošitev konformnih preslikav. Medtem ko konformne preslikave slikajo infinitesimalne kroge v infinitesimalne kroge, slikajo kvazikonformne preslikave infinitesimalne elipse v infinitesimalne kroge. To jim da večjo fleksibilnost, vseeno pa kvazikonformne preslikave ohranjajo nekatere geometrijske lastnosti.

Naj bo $U \subseteq \mathbb{C}$ in $f \in C^1(U)$ kompleksno diferenciable preslikava. Če vpeljemo standardne oznake $dz = dx + i dy$ in $d\bar{z} = dx - i dy$ ter Wirtingerjeva operatorja

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{in} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

lahko izrazimo Jakobijevo determinanto preslikave f

$$J_f = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2.$$

Omejili se bomo na preslikave, za katere velja $|f_{\bar{z}}| < |f_z|$, torej take, ki ohranjajo orientacijo, in za katere velja, da $|f_z| \neq 0$. Za takšne preslikave bo naslednja definicija dobra.

Definicija 5. *Kompleksna dilatacija* ali *Beltramijev koeficient* preslikave f je preslikava $\mu = \mu_f$, dana z izrazom

$$\mu = \frac{f_{\bar{z}}}{f_z}.$$

Izbrani točki $p \in U$ bomo sedaj priredili infinitesimalno elipso, ki jo bo preslikava f preslikala v krog. Tak predpis imenujemo *eliptično polje*. Natančneje, diferencial preslikave f določa $\mathbb{R}$ -linearno preslikavo

$$L_p z = f_z(p)z + f_{\bar{z}}(p)\bar{z}.$$

Točki p priredimo družino koncentričnih elips s predpisom

$$p \mapsto E_p = \{L_p^{-1}(\Delta_r) \mid r > 0\}.$$

Zanimala nas bosta le razmerje med malo in veliko polosjo elipse ter kot velike polosi glede na absciso. Zato lahko družino koncentričnih elips poistovetimo z infinitesimalno elipso.

Definicijo eliptičnega polja lahko razumemo tudi na sledeč način. Začeli smo s poljem samih krožnic, nato pa vsaki točki p priredili elipso, ki jo L_p slika v krožnico. V tem smislu lahko f deluje na vsako eliptično polje E . Točki p priredimo elipso, ki jo L_p preslika v elipso E_p . To nam določi novo eliptično polje $f(E)$. Če je $f(E) = E$, pravimo, da je polje E *f-invariantno*.

Z malo dela lahko eliptično polje, ki ga določa preslikava f , natančno določimo. Če označimo $\mu = \mu(p)$, je razmerje med malo in veliko polosjo elipse, ki jo priredimo točki p , enako

$$\frac{1 - |\mu|}{1 + |\mu|}$$

in argument velike polosi glede na absciso

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\arg(\mu)}{2}.$$

Opazimo, da je eliptično polje preslikave f natančno določeno z Beltrami-jevim koeficientom μ tam, kjer je ta definiran. Razmerje med polosema je določeno z $|\mu|$, kot velike polosi glede na absciso pa z $\arg(\mu)$.

Kvazikonformne preslikave bodo takšne, ki nobeni točki ne bodo priredile izrojene elipse. Z drugimi besedami, stopnja deformiranosti krožnice pri kvazikonformnih preslikavah je omejena. To idejo natančno podamo v definiciji.

Definicija 6. Naj bo $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$. Preslikava $f \in C^1(U)$ je *k-kvazikonformna*, če za nek $0 \leq k < 1$ velja

$$\sup_{z \in U} |\mu(z)| \leq k.$$

Preslikava je *kvazikonformna*, če je *k-kvazikonformna* za kak k .

Število k lahko razumemo kot mero, kako blizu je kvazikonformna preslikava konformnosti. V posebnem, če je f konformna preslikava, je njen Beltramijev koeficient v vsaki točki enak 0 in zato je f 0-kvazikonformna preslikava. Pripadajoče eliptično polje vsaki točki priredi krožnico.

Isto zgodbo pogledajmo sedaj iz druge smeri. Denimo, da imamo podano eliptično polje E na domeni $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$. Zanima nas, ali obstaja preslikava, ki porodi to eliptično polje. Vemo že, da lahko iz elipse v dani točki razberemo vrednost Beltramijevega koeficienta μ v tisti točki. Iščemo torej preslikavo, ki zadošča t. i. *Beltramijevi enačbi*

$$f_{\bar{z}} = \mu(z)f_z.$$

Izkaže se, da če je preslikava μ dovolj lepa, obstaja kvazikonformna preslikava, ki je rešitev te diferencialne enačbe. To bo ključno orodje pri dokazu osrednjega izreka diplomske naloge.

5 Kvazikonformna kirurgija

Glavni izrek bomo dokazali s pomočjo kvazikonformne kirurgije. To konstrukcijo je leta 1987 v članku z naslovom *On the quasiconformal surgery of rational functions* objavil japonski matematik M. Shishikura.

Najprej bomo s pomočjo racionalne preslikave R odsekoma definirali pomožno preslikavo g , ki bo imela zelene dinamične lastnosti. Preslikava g še ne bo nujno racionalna, zato jo bomo v nadaljevanju popravili. V ta namen definiramo g -invariantno eliptično polje E in s pomočjo Beltramijeve enačbe poiščemo kvazikonformno preslikavo ϕ , ki nam to polje porodi. Pokazali bomo, da je preslikava $\tilde{R} = \phi \circ g \circ \phi^{-1}$ tista, ki jo iščemo.

Literatura

- [1] A. F. Beardon, *Iteration of Rational Functions*, Springer-Verlag, New York, Inc. 1991.
- [2] L. Carleson in T. W. Gamelin, *Complex dynamics*, Springer-Verlag, New York, Inc. 1993.
- [3] U. Kuzman, *Obstoj majhnih J -holomorfnih diskov*, diplomsko delo, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2008.