

Minimalno število različnih lastnih vrednosti dreves

Tadej Mohorčič

Mentor: prof. dr. Polona Oblak

1 Uvod

Tema moje diplomske naloge, spektralna teorija grafov, spada med področja linearne algebre in diskretne matematike - natančneje teorije grafov. To je torej področje matematike, ki se ukvarja s simetričnimi matrikami, ki so predstavljive kot grafi, njihovimi lastnimi vrednostmi, lastnimi vektorji ter karakterističnimi polinomi. Moje delo ne bo vsebovalo vseh teh stvari, ukvarjal se le bom z takoimenovanim inverse eigenvalue problem - inverzni problem lastnih vrednosti. Vprašanje, ki si ga bom postavil, je sledeče:

Ali lahko iz podatka o spektru konstruiramo matriko, da bodo njene lastne vrednosti ležale v danem spektru?

V diplomski nalogi se bom ukvarjal le z drevesi. Drevo definiramo kot graf brez ciklov, torej graf, kjer je vsaka povezava most. Predstavil bom nekaj načinov, s katerimi se omejimo pri realiziranju spektrov, na koncu pa bom obravnaval še dva zanimiva primera - eden ovrže hipotezo, za katero se je dolgo mislilo, da je resnična, drugi pa pokaže dodaten zanimiv rezultat.

2 Osnovni pojmi

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrična matrika. Potem ji lahko priredimo graf $T(A) = (V, E)$ na sledeč način: Množico vozlišč označimo z $\{1, 2, \dots, n\}$, vozlišči $i \neq j$ pa sta sosednji natanko tedaj, ko je $a_{i,j} \neq 0$. Elementi na diagonali bodo v našem primeru poljubna realna števila. Veljalo pa bo tudi obratno: če je $T(A) = (V, E)$ graf, lahko z množico $S(T)$ označili množico vseh simetričnih matrik A , da je $T(A) = T$. Torej:

$$S(T) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid T(A) = T\}$$

Spekter matrike $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je množica vseh njenih lastnih vrednosti, tj. $\sigma(A) = \{\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n\}$. Da si stvari malce olajšamo, bomo v prihodnje v spektru navedli le različne lastne vrednosti, njihove večkratnosti pa označili z $\text{mult}(\lambda_i) = m_i$.

Definicija 1. Spekter $\sigma = \{\lambda_i \mid \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k\}$ je *realizabilen* glede na drevo T , če obstaja $A \in S(T)$, da velja:

$$\text{spec}(A) = \sigma$$

Če v naši družini simetričnih matrik obstaja takšna, da so njene lastne vrednosti enake kot v σ , vključno z večkratnostmi, bomo torej rekli, da je spekter *realizabilen* za drevo T .

Definicija 2. Seznam večkratnosti spektra $\sigma = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k\}$ bomo označili z

$$\langle m_1, m_2, \dots, m_k \rangle,$$

Hitro lahko vidimo, da se stvari zakomplicirajo, če bi želeli delati z konkretnimi lastnimi vrednostmi. Z uvedbo seznama večkratnosti pa lahko problem prevedemo na precej enostavnejšega. Namesto spektrov lahko gledamo, kateri sezname večkratnosti so za izbrano drevo realizabilni. Tako nam ne bo pomembna dejanska vrednost za λ_i , temveč samo njena večkratnost. Izkazalo se je, da je bil to ključni korak do mnogih ugotovitev na tem področju [2]. Poleg tega pa nas bo zanimal tudi parameter $q(T)$, ki bo označeval najmanjše možno število lastnih vrednosti za drevo T . Postavljena je bila hipoteza, da za vsako drevo T velja

$$q(T) = \text{diam}(T) + 1,$$

ki pa jo bom tudi sam ovrgel s protiprimerom.

3 Parter-Wienerjev izrek

Za drevo $T = (V, E)$ lahko definiramo premer $\text{diam}(T)$ kot dolžino najdaljše poti, ki jo lahko najdemo v njem. Hkrati omenimo še razdaljo med vozliščema - rečemo da sta vozlišči u in v na razdalji d , če obstaja pot dolžine d , ki se začne v u (ali v) in se konča v v (ali u). Med vsemi potmi med u in v je ta seveda najkrajša. Opremljeni le s tema podatkom lahko dobimo prvo oceno za število različnih lastnih vrednosti.

Trditev 3.1. Naj bo $G = (V, E)$ povezan graf in $u \neq v \in V$ različni vozlišči. Če sta u in v na razdalji d , in če je ta pot unikatna, velja:

$$q(G) \geq d + 1$$

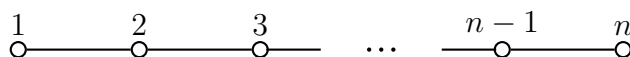
Seveda ta trditev velja za splošen povezan graf G , če pa govorimo le o drevesih, pa se malce poenostavi. Namreč, vsako drevo je povezano, po definiciji pa velja tudi, da med različnima vozliščema obstaja natanko ena pot.

Posledica 1. *Za vsako drevo T velja:*

$$q(T) \geq \text{diam}(T) + 1$$

Prva ocena je torej, da imamo vedno vsaj $\text{diam}(T) + 1$ različnih lastnih vrednosti.

Zgled 1. Oglejmo si pot P_n na n vozliščih.



Lahko bi se potrudili in z znanjem linearne algebre prišli do lastnih vrednosti za tridiagonalne matrike, vendar se nam zgornji izrek ponuja kar sam od sebe. Vidimo, da je premer enak dolžini poti med prvim in zadnjim vozliščem. Torej bo veljalo:

$$q(T) \geq \text{diam}(T) + 1 = n - 1 + 1 = n$$

Ker pa ima drevo T n vozlišč, so matrike, ki mu pripadajo velikosti $n \times n$. Torej imajo n lastnih vrednosti in po zgornjem izračunu so vse različne. $\diamond$

Naj bo sedaj $T = (V, E)$ drevo in $A \in S(G)$ neka pripadajoča matrika. Iz množice vozlišč lahko izberemo elemente $\{v_1, \dots, v_k\}$ in definiramo $A(v_1, \dots, v_k)$ kot matriko, kjer smo odstranili ravno stolpce in vrstice z indeksi v_i . Če izberemo le vozlišče v , bomo tako zapisali $A(v)$. S tem smo tudi pripadajočemu drevesu T odstranili vozlišča z istoležnimi indeksi. Dobili smo gozd $G = \{T_1, \dots, T_l\}$, torej nepovezan graf, katerega vsaka komponenta je drevo T_i . Takoj se lahko vprašamo, kaj znamo povedati o lastnih vrednosti dreves T_i , če poznamo lastne vrednosti drevesa T .

Izrek 1. *Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrična matrika in v poljubno vozlišče pripadajočega drevesa T . Če označimo z $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ lastne vrednosti matrike A in z $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_{n-1}$ lastne vrednosti matrike $A(v)$ bo veljalo:*

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n$$

Izreku pravimo *Cauchyjev izrek o prepletanju*, ki nam pove, da so lastne vrednosti matrike $A(v)$ „ujete“ med lastnimi vrednostmi matrike A . Iz [4] pa razberemo še eno pomembno povezavo med lastnimi vrednostmi λ in μ .

Trditev 3.2. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrična matrika in v poljubno vozlišče. Če je λ lastna vrednost matrik A in $A(v)$, velja ena od naslednjih enakosti:

$$\text{mult}_{A(v)}(\lambda) = \text{mult}_A(\lambda) - 1 \quad (1)$$

$$\text{mult}_{A(v)}(\lambda) = \text{mult}_A(\lambda) \quad (2)$$

$$\text{mult}_{A(v)}(\lambda) = \text{mult}_A(\lambda) + 1 \quad (3)$$

Posledica 2. Če je T drevo z lastnimi vrednostmi $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k$, potem imata največja in najmanjša lastna vrednost večkratnost ena:

$$\text{mult}(\lambda_1) = \text{mult}(\lambda_k) = 1$$

Posledično, λ_1 in λ_k ne morata biti lastni vrednosti matrike $A(v)$ za neko vozlišče v .

Ne le, da se lastne vrednosti pri odstranjevanju vozlišča spremenijo kvečjemu za ena, dodatno vidimo, da se največja in najmanjša ne smeta ponoviti. Sledi formulacija izreka, ki nam bo služil kot glavno orodje pri odgovarjanju na začetno vprašanje.

Izrek 2 (PW-izrek). Naj bo $T = (V, E)$ drevo z n vozlišči in $A \in S(T)$ neka pripadajoča matrika, da za λ velja $\text{mult}_A(\lambda) \geq 2$. Potem velja:

- $\exists v \in V, \deg(v) \geq 3$
- $\text{mult}_{A(v)}(\lambda) = \text{mult}_A(\lambda) + 1$
- λ je element vsaj treh dreves T_i gozda $G = T(V - \{v\}, E)$

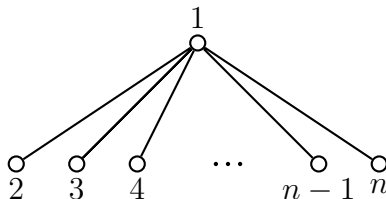
Vozlišču v iz izreka bomo rekli *Parter-Wienerjevo vozlišče*, oziroma na kratko *PW vozlišče*. Takoj se da tudi razbrati, da mora imeti vsaka lastna vrednost λ , $\text{mult}(\lambda) \geq 2$ vsaj eno PW vozlišče v . Lepa lastnost izreka pa je tudi ta, da se ga da rekurzivno uporabljati: Recimo, da smo za drevo T , asociirano z matriko $A \in S(T)$ in lastno vrednost λ , $\text{mult}(\lambda) \geq 2$ našli PW vozlišče - označimo ga z v - in ga odstranili. Zgodi se lahko, da v enem izmed nastalih dreves T_i λ še vedno večkratnosti vsaj dva. Potem smemo izrek ponovno uporabiti. Dobimo še eno PW vozlišče u , ta pa je tokrat vozlišče matrike $A(v)$. Če induktivno uporabimo 2 točko izreka, bo veljalo:

$$\text{mult}_{A(v,u)}(\lambda) = \text{mult}_{A(v)}(\lambda) + 1 = \text{mult}_A(\lambda) + 2$$

Definicija 3. Množici $V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ pravimo *PW množica* za lastno vrednost λ , če velja:

$$\text{mult}_{A(v_1, v_2, \dots, v_k)}(\lambda) = \text{mult}_A(\lambda) + k$$

Zgled 2. Oglejmo si graf $K = K_{1,n-1}$, torej zvezdo na n vozliščih



Prva ocena sledi iz $diam(K) = 2$, torej bo $q(K) \geq 3$. Ali bi bilo možno, da imamo le 3 lastne vrednosti? **Posledica 2.** nam pove, da bi morale biti lastne vrednosti enake $\lambda_1 < \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} < \lambda_n$. Ali sploh lahko imamo lastno vrednost λ večkratnosti $n-2$? Opazimo, da je $deg(1) = n-1 \geq 3$, drevo $K(1)$ razpade na vsaj 3 komponente, torej bo veljalo

$$mult_{K(1)}(\lambda) = mult_K(\lambda) + 1 = n - 2 + 1 = n - 1$$

λ pa je lahko lastna vrednost v vsakem vozlišču - graf, ki ga dobimo je popolnoma nepovezan. Torej je $q(K) = 3$ in obstaja spekter $\sigma = \{\lambda_1 < \lambda < \lambda_2\}$, ki je realizabilen za drevo K , vozlišče 1 pa je PW vozlišče. Doo tega lahko pridemo tudi algebraično: matrika A , ki pripada temu grafu ima prvi stolpec in prvo vrstico poljubno, na diagonali pa ima ravno λ . Matrika $A - \lambda I$ ima tako rang 2, torej je $mult(\lambda) = n - 2$ $\diamond$

4 Uporaba PW izreka

Vidimo, da je PW izrek ključnega pomena pri iskanju realizabilnih spektrov. Z reduciranjem drevesa preko PW vozlišč ali celo PW množic na manjša drevesa, lahko vsako od njih obravnavamo spet kot novo drevo. S kombinatoričnim poskušanjem potem ugotavljamo, ali so podani spektri σ realizabilni ali ne. Lahko pa ga uporabimo tudi v obratni smeri: iz preprostih dreves, za katere vemo realizabilne spektre σ , z dodajanjem vozlišča, preko katerega dana drevesa povežemo, zgradimo bolj zakomplicirano drevo, za katerega znamo navesti možnosti za spekter σ . Morda s tem postopkom ne dosežemo spodnje meje za parameter $q(T)$, lahko pa dobimo precej dobro oceno navzgor.

Literatura

- [1] B. Ahmadi, F. Alinaghipour, M. S. Cavers, S. Fallat, K. Meagher, and S. Nasserashr. Minimum number of distinct eigenvalues of graphs. *Electronic journal of linear algebra*, 26:673–691, 2013.
- [2] F. Barioli and S. M. Fallat. On two conjectures regarding an inverse eigenvalue problem for acyclic symmetric matrices. *Electronic journal of linear algebra*, 11:41–50, 2004.
- [3] C. R. Johnson and A. L. Duarte. On the minimum number of distinct eigenvalues for a symmetric matrix whose graph is a given tree. *Mathematical inequalities & applications*, 5:175–180, 2002.
- [4] C. R. Johnson, A. L. Duarte, and C. M. Saiago. The parter-wiener theorem: Refinement and generalization. *SIAM*, 25:352–361, 2003.